कक्षा XI-XII के लिए

गणित

की पाठ्यपुस्तक

पुस्तक I

सम्पादक
मनमोहन सिंह अरोरा

सहायक सम्पादक
अजीत कौर चिलाना
राजेन्द्र पी० गुप्ता
सतीश शिराली

विद्ययाऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्
NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
जून 1978
आषाढ़ 1900

पुनर्मुद्रण
जून 1979
ज्येष्ठ 1901
अप्रैल 1982
चैत्र 1904
मार्च 1985
चैत्र 1904

P.D. 5T—SD

मूल्य : रु० 6.50

प्रकाशन विभाग में श्री विनोद कुमार पंडित, सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, श्री अरविन्द मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा आरसी प्रेस, पहाड़गंज, नई दिल्ली 110055 में मुद्रित ।

प्राक्कथन

'कक्षा XI—XII के लिए गणित की पाठ्यपुस्तक' की श्रृंखला में इस पुस्तक I को देख कर मुझे प्रसन्नता है। इस पुस्तक में पाठ्य सामग्री के प्रस्तुतीकरण से, जो स्पष्ट और चित्त आकर्षक है, मैं बहुत प्रभावित हूँ। विभिन्न विषयों का विकास प्रारम्भिक संकल्पनाओं से लेकर उस स्तर तक सुचारु रूप से किया गया है जो 16 + से 18 + की आयु वर्ग के विद्यार्थियों से अपेक्षित है। इस प्रक्रम में वास्तविक जीवन की स्थितियों को दक्षतापूर्वक प्रयुक्त किया गया है। पुस्तक के सम्पादन कार्य की ओर विशेष ध्यान दिया गया है। विषय वस्तु में स्वाभाविक प्रवाह है तथा विद्यार्थियों द्वारा पिछली कक्षाओं में अध्ययन की गई सामग्री से निरन्तरता बनाए रखी गई है। इसी उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए उपयुक्त स्थानों पर पुनरावलोकन अनुच्छेद तथा प्रश्नावलियाँ रखी गई हैं।

इस पुस्तक का प्रथम प्रारूप राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग में गणित एकक द्वारा तैयार किया गया। इस सम्बन्ध में मानकों तथा लेखन प्रयुक्तियों का विकास प्रो० मनमोहन सिंह अरोरा के कुशल मार्गदर्शन में किया गया। विशेष रूप से जिन व्यक्तियों ने इस पुस्तक के प्रथम प्रारूप को तैयार करने में सहायता प्रदान की वे हैं विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के श्री आर० सी० सक्सेना, डा० एस० सी० दास, डा० राम अवतार, श्री जी० डी० ढल, डा० एस० के० सिंह गौतम, डा० के० सी० मदान और डा० ए० आर० साहू तथा पाठ्यपुस्तक विभाग के डा० वी० पी० गुप्ता।

प्रथम प्रारूप का आलोचनात्मक विवेचन अध्यापकों, विषय विशेषज्ञों, अध्यापक प्रशिक्षकों, राज्य शिक्षा संस्थानों एवं राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थानों के प्रतिनिधियों तथा गणित के उपयोगकर्ताओं के एक समुदाय द्वारा अक्टूबर 1977 में कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय के गणित विभाग में इसी उद्देश्य से आयोजित एक कार्य शिविर में किया गया तथा इसके सुधार के लिए सुझाव दिए गए। इस पुस्तक को इस रूप में लाने मे उनके महत्त्वपूर्ण योगदान के लिए मैं उन सबका अत्यन्त आभारी हूँ।

पुस्तक का अन्तिम लेखन तथा विषय-सम्पादन प्रो० मनमोहन सिंह अरोरा ने किया। इस कार्य में दिल्ली विश्वविद्यालय के गणित विभाग की डा० (कु०) अजीत कौर चिलाना, पंजाब विश्वविद्यालय के गणित के उच्चतर अध्ययन-केन्द्र के डा० सतीश शिराली तथा विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के डा० आर० पी० गुप्ता ने बहुमूल्य सहायता प्रदान की। हिंदी संस्करण की देखरेख श्री महेन्द्र शंकर ने की जिसमें डा० के० सी० मदान तथा श्री ईश्वर चन्द्र ने आवश्यक सहायता प्रदान की। विभिन्न एककों के लेखकों के अतिरिक्त पुस्तक के उत्तर डा० एस० सी० दास, श्री आर० एस० कोठारी, डा० (श्रीमती) सूरजा कुमारी तथा कु० नीलम पसरीचा ने प्रदान किए।

मैं इन सबका तथा विशेष रूप से प्रो० मनमोहन सिंह अरोरा का आभारी हूँ जिन्होंने अपने व्यस्त कार्यक्रम के साथ-साथ इस पुस्तक के सम्पादन का कठिन कार्य किया। उनके परिश्रम तथा उत्साहपूर्ण नेतृत्व के बिना इतने अल्प समय में यह कार्य पूर्ण नहीं हो सकता था।

इस पुस्तक के उपयोगकर्ताओं की प्रतिक्रियाएँ प्राप्त करके परिषद् अति प्रसन्न होगी तथा इसमें और अधिक सुधार हेतु दिये गए सुझावों का स्वागत करेगी।

शिब के० मित्र
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

नई दिल्ली
मई 1978

प्रस्तावना

यह पुस्तक 'कक्षा XI—XII के लिए पाठ्यपुस्तक' श्रृंखला का प्रथम भाग है। एक प्रमुख प्रश्न जो हमारे सम्मुख आया वह यह था कि 'क्या उपयोगकर्ताओं के विभिन्न वर्गों के लिए अर्थात् जैविकी, भौतिकी, अर्थशास्त्र, इत्यादि के विद्यार्थियों के लिए भिन्न-भिन्न गणित होना चाहिए अथवा एक ही कोर (core) पाठ्यक्रम कक्षा XI—XII के सभी विद्यार्थियों की माँग को पूर्ण कर देगा?' अनेक शिक्षकों तथा विषय विशेषज्ञों से प्राप्त समालोचनाएँ इस पक्ष में थीं कि इस स्तर पर गणित का एक ही पाठ्यक्रम होना चाहिए जिसमें अनुप्रयोगों के विभिन्न क्षेत्रों से स्थितियों का समावेश किया जाए।

अत: विभिन्न एककों की प्रथम पाठ्य सामग्री तैयार करना प्रारम्भ करने से पहले परिषद् के गणित एकक के सदस्यों द्वारा एक विस्तृत रूपरेखा तैयार की गई। इस योजना में वास्तविक जीवन की स्थितियों के चयन तथा उन्हें समावेश करने के स्थानों का इस अवस्था के लिए इष्टतम स्तर तक विकास के द्वारा किसी विषय का समावेश करने के दृष्टिकोण से बच्चे की पूर्व-आकांक्षाओं, उसकी योग्यता के अपेक्षित स्तर, उसकी ग्राह्य क्षमता तथा अन्य सम्बन्धित बातों को समुचित महत्व दिया गया। अत: विस्तृत योजना तथा गहन विचार-धारा इस पुस्तक के आधार हैं।

प्रथम प्रारूप परिषद् में मेरे साथियों द्वारा तैयार किया गया तथा इसका पर्यवेक्षण कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र के गणित विभाग में इसी उद्देश्य से आयोजित एक कार्यशिविर में किया गया जिसमें अनेक अनुभवी अध्यापकों, विषय-विशेषज्ञों, इत्यादि ने भाग लिया। मैं कार्यशिविर में भाग लेने वाले सभी व्यक्तियों का आभारी हूँ और साथ ही अपने साथियों का भी जिन्होंने इस कार्य को इस स्तर तक लाने में प्रसन्नतापूर्वक अपना पूर्ण योग दिया। मैं कुछ व्यक्तियों का ज़िक्र किए बिना नहीं रह सकता जिन्होंने इस पुस्तक के कुछ एककों को प्रथम प्रारूप प्रदान किया। वे हैं—विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के श्री आर० सी० सक्सेना, डा० एस० सी० दास, डा० राम अवतार, श्री जी० डी० ढल, डा० एस० के० सिंह गौतम, डा० के० सी० मदान और डा० ए० आर० साहू तथा पाठ्य पुस्तक विभाग के डा० वी० पी० गुप्ता।

इसके उपरान्त मैंने दिल्ली विश्वविद्यालय के गणित विभाग की डा० (कु०) अजीत कौर चिलाना, पंजाब विश्वविद्यालय के गणित के उच्चतर अध्ययन-केन्द्र के डा० सतीश शिराली तथा विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के डा० आर० पी० गुप्ता की बहुमूल्य सहायता से पाठ्य सामग्री का सम्पादन तथा पुनर्लेखन किया। डा० एस० सी० दास, श्री आर० एस० कोठारी, डा० (श्रीमती) सूरजा कुमारी तथा कु० नीलम पसरीचा ने इस पुस्तक के कुछ एककों के उत्तर प्रदान किए। श्री महेन्द्र शंकर ने डा० के० सी० मदान तथा श्री ईश्वर चन्द्र की सहायता से हिन्दी संस्करण का सम्पादन कार्य किया। मुझे इनमें से प्रत्येक का हार्दिक आभार प्रकट करने में अति प्रसन्नता है।

इस पुस्तक की कुछ मुख्य विशेषताओं की ओर ध्यान दिलाना समयोचित ही होगा।

1. इस पुस्तक की पद्धति वही है जो परिषद् की IX तथा X कक्षाओं की पुस्तकों की है। प्राय: आकर्षक स्वान्वेषण तर्कों द्वारा तथा कहीं-कहीं दृढ़ता को खोकर, संकल्पनाओं तथा परिणामों के समझाने पर बल दिया गया है।
2. किसी संकल्पना का परिचय कराते समय उपयुक्त उदाहरण तथा स्थिति से सम्बन्धित अभिप्रेरण प्रदान किये गए हैं।
3. पुस्तक में अत्यधिक हल किये गए उदाहरणों का समावेश किया गया है ताकि विद्यार्थी किसी संकल्पना के अनुप्रयोग के विस्तृत क्षेत्र को जान सके।
4. पुस्तक को विभिन्न स्वतन्त्र एककों में विभाजित किया गया है। प्रत्येक एकक के प्रारम्भ में इसमें समाहित सामग्री के विषय में संक्षेप में बताया गया है तथा अंत में मुख्य संकल्पनाओं की सूची दी गई है ताकि विद्यार्थी अविलम्ब ही किसी एकक विशेष में पढ़ी हुई सामग्री का पुनरावलोकन कर सके।
5. प्रत्येक एकक के अंत में अग्रिम अध्ययन हेतु सुझाव दिये गए हैं ताकि योग्य विद्यार्थी अपने ज्ञान की परिधि बढ़ा सकें।
6. प्रत्येक एकक में अनेक प्रश्न देने का उद्देश्य अध्यापक के लिए प्रश्नों का एक संग्रह प्रदान करना है जिससे वह विभिन्न योग्यताओं के विद्यार्थियों की माँग पर्याप्त रूप से पूर्ण कर सके।
7. यह दर्शाने के लिए कि अगले अनुच्छेद अथवा एकक का अध्ययन करने से पहले विद्यार्थी को किन संकल्पनाओं को भलीभाँति याद रखना है पुनरावलोकन अनुच्छेदों, एककों तथा प्रश्नावलियों का समावेश किया गया है।
8. उपयुक्त स्थानों पर विविध प्रश्नावलियों का समावेश किया गया है ताकि उपयुक्त अन्तरालों पर विद्यार्थी पाठ्य सामग्री को दोहरा सके तथा उस विषय में प्रवीणता प्राप्त कर सके।
9. विद्यार्थी की गणितीय विचारधारा को उत्तेजित करने तथा उसके विचारों को स्पष्ट करने के लिए अनेक स्थानों पर "क्यों ?" लिख दिया गया है। अत: अध्यापक से अपेक्षित है कि वह स्वयं उत्तर प्रदान करने की अपेक्षा विद्यार्थी को उत्तर देने के लिए प्रोत्साहित करे।
10. कठिन प्रश्नों तथा अनुच्छेदों को तारांकित किया गया है।
11. ऐतिहासिक विवरणों का समावेश किया गया है ताकि विद्यार्थी किसी विशेष संकल्पना के विकास के प्रक्रम में झांक सके तथा यह अनुमान लगा सके कि एक अन्वेषक तथा गणितज्ञ की मस्तिष्क की क्रियाएँ कैसी होती हैं।

पाठ्य पुस्तक किसी अध्यापन-अध्ययन प्रक्रिया में एक आवश्यक उपकरण होती है। इस प्रक्रिया में एक अध्यापक के कार्य के महत्व को बढ़ा चढ़ा कर नहीं कहा जा सकता। यहाँ यह याद दिलाना अधिक आवश्यक नहीं है कि अपने विषय को जितना सम्भव हो सके रुचिपूर्ण तथा जीवंत बनाना, विद्यार्थियों में रुचि उत्पन्न करना तथा इसे बनाए रखना तथा उसे निरन्तर विस्तीर्ण सीमाओं की ओर ले जाना अध्यापक का पावन कर्त्तव्य है। मुझे विश्वास है कि अध्यापक इस पुस्तक में निहित विचारधारा को समझेंगे एवं इससे सहमत होंगे तथा इस बात का प्रयास करेंगे कि विद्यार्थियों का विषय मे अनुराग हो तथा वे इसमें उच्च प्रवीणता प्राप्त करें।

अंत में मैं विद्यार्थी के लिए कुछ शब्द अवश्य कहूँगा।

आप गणित की इस पुस्तक का अध्ययन करने जा रहे हैं। यदि आप आरम्भ में ही अध्ययन का 'अच्छी' आदतें डाल लें तो आपको गणित का अध्ययन अति आकर्षक एवं लाभकारी लगेगा। अध्ययन की कु अच्छी आदतें निम्न हैं:

1. **गणित को केवल करके ही सीखा जा सकता है।** अपनी पाठ्यपुस्तक को केवल पढ़िए ही नहीं। आप सदा एक कागज और पेंसिल लेनी चाहिए और फिर पुस्तक का अध्ययन करना चाहिए।

2. पाठ्यपुस्तक में जहाँ कहीं भी आपके सम्मुख "क्यों?" आ जाए तो आपको उसका उत्तर खोजने का प्रयत्न करना चाहिए।

3. **किसी एक प्रश्न पर बहुत अधिक समय न लगाएँ।** यह सदा अच्छा रहता है कि पहले हम अगले प्रश्न चले जाएँ और बाद में शुद्ध मस्तिष्क के साथ उस प्रश्न पर वापिस आ जाएं जिसमें हम कठिनाई अनु कर रहे थे।

4. मानव मस्तिष्क कुछ सीमित सामग्री का ही संग्रह कर सकता है। जिस किसी वस्तु का अधिक प्रयोग न होता वह संग्रह से निकाल दी जाती है। अतः **यह अच्छा रहेगा यदि आप प्रत्येक एकक के मुख्य प की एक संक्षिप्त सूची बना लें तथा बीच-बीच में उन्हें दोहराते रहें।**

हमारे अत्यधिक प्रयत्नों के होते हुए भी यह सम्भव है कि पुस्तक में कुछ अप्रत्याशित त्रुटियाँ रह हों। यदि किसी त्रुटि की ओर हमारा ध्यान दिलाया गया तो परिषद् इसके लिए अति कृतज्ञ होगी त पुस्तक के आगे के संस्करणों में सुधार के लिए दिए गए सुझावों का स्वागत करेगी।

नई दिल्ली
मई 1978

मनमोहन सिंह अरोरा
सम्पादक

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् निम्नलिखित व्यक्तियों के प्रति आभारी है जिन्होंने अक्तूबर, 1977 में गणित विभाग कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय में आयोजित एक कार्यशिविर में इस पाठ्यपुस्तक के लिए तैयार किये गए प्रारूप के पर्यवेक्षण में महत्वपूर्ण योगदान दिया :

1. डा० मनमोहन सिंह अरोरा
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
2. डा० राम अवतार
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
3. श्री एन० बी० बद्रीनारायन
   क्षेत्रीय शिक्षा महाविद्यालय, मैसूर
4. श्री एस० जी० बाजवा
   ए० ई० सी० स्कूल, थाना
5. डा० प्रकाश चन्द्र
   कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र
6. डा० एस० डी० चोपड़ा
   कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र
7. श्री सुकुमार चोपड़ा
   कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र
8. श्रीमती एस० देवासुन्दरम्
   सैंट जेवियर्स स्कूल, दिल्ली
9. श्री जी० डी० ढल
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
10. डा० एस० के० सिंह गौतम
    राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
11. डा० ए० के० गायन
    इंडियन इन्स्टीट्यूट आफ टैक्नोलाजी, खड़गपुर
12. डा० एम० एल० गोगना
    कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र

13. कु० अंजु गोयल
कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र

14. श्री सत्यपाल गुलाटी
ए० आर० एस० डी० हायर सेकेंडरी स्कूल, दिल्ली

15. डा० आर० पी० गुप्ता
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

16. डा० बी० पी० गुप्ता
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

17. डा० इकबाल हुसैन
अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय, अलीगढ़

18. कु० प्रेम सुधा शारदा
कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र

19. श्री जी० आर० कक्कड़
केन्द्रीय विद्यालय, चंडीगढ़

20. श्री जे० डी० कालरा
केन्द्रीय विद्यालय, एच० एम० टी०, पिंजौर

21. श्री जे० पी० कन्सल
एयर फोर्स सैंट्रल स्कूल, दिल्ली कैंट, दिल्ली

22. डा० रविन्द्र कुमार
रामजस कालेज, दिल्ली

23. डा० (श्रीमती) सूरजा कुमारी
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

24. श्रीमती कंचन मानकतला
गार्गी कालेज, नई दिल्ली

25. डा० आर० एन० मुखर्जी
बी० आई० टी० एस०, पिलानी

26. श्री के० एस० मूर्ति
केन्द्रीय विद्यालय, सिकन्दराबाद

27. श्री बी० नायडू
राजकीय कालेज, मलिया, हैदराबाद

28. श्री शान्ति नारायण
भूतपूर्व डीन ऑफ कालेजेस, दिल्ली विश्वविद्यालय, दिल्ली

29. कु० उमेश परमार
कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र

30. डा० आई० बी० एस० पासी
कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र

31. श्रीमती राजरानी
बी० एन० रस्तोगी राजकीय कन्या उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, दिल्ली

32. श्री बी० एस० पाण्डु रंगा राव
मैसूर विश्वविद्यालय, मैसूर

33. श्री एस० एल० सैनी
कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय, कुरुक्षेत्र

34. कु० कमला साहनी
ब्रिटिश स्कूल, चाणक्यपुरी, नई दिल्ली

35. श्री आई० डी० शर्मा
केन्द्रीय विद्यालय, आई० आई० टी० कैम्पस, नई दिल्ली

36. श्री ओ० पी० श्योरन
केन्द्रीय विद्यालय, आई० एन० ए० कालोनी, नई दिल्ली

37. डा० सतीश शिराली
पंजाब विश्वविद्यालय, चंडीगढ़

38. डा० बी० वी० सिंगबाल
टाटा इन्स्टीट्यूट ऑफ फंडामैंटल रिसर्च, बम्बई

39. श्री बलबीर सिंह
राजपूताना राइफल्स हीरोज मैमोरियल हायर सैकेंडरी स्कूल, दिल्ली कैंट, दिल्ली

40. श्री तरलोचन सिंह
एस० एस० खालसा हायर सैकेंडरी स्कूल, नई दिल्ली

41. श्री पी० के० तिवारी
केन्द्रीय विद्यालय, हिंडन, गाजियाबाद

42. श्री ओ० एन० तिवारी
भास्करानन्द इन्टर कालेज, नर्वल, कानपुर

43. श्री यशपाल वर्मा
नवयुग स्कूल, नई दिल्ली

विषय-सूची

एकक 1

संख्या - निकाय

इस एकक में हम प्राकृत संख्याओं (धनपूर्णांकों), पूर्णांकों तथा परिमेय संख्याओं, इत्यादि का पुनरावलोकन करेंगे। प्राकृत संख्याओं का पूर्णांकों में, पूर्णांकों का परिमेय संख्याओं में तथा परिमेय संख्याओं का वास्तविक संख्याओं में विस्तार करने का अभिप्रेरण किया गया है। परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं को दशमलवों के रूप में व्यक्त करने पर विचार किया गया है। अन्त में वास्तविक संख्याओं के गुणधर्मों को दोहराया गया है।

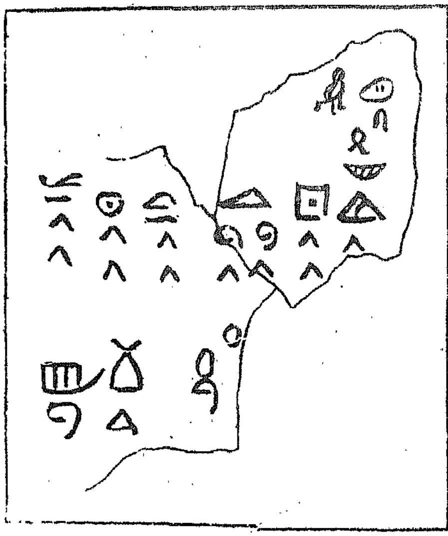
1.1 भूमिका

प्राकृत संख्याओं, पूर्णांकों तथा परिमेय संख्याओं, इत्यादि से हम पहले ही परिचित हैं। प्रस्तुत एकक में हम विभिन्न संख्या-निकायों (number-systems) को दोहरायेंगे तथा इनके विषय में और अधिक जानकारी प्राप्त करेंगे।

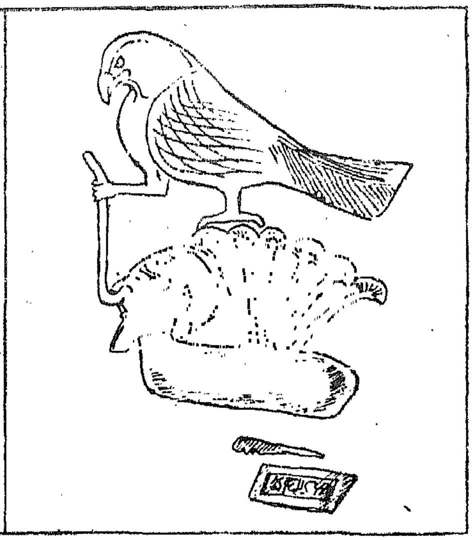


ऐतिहासिक तौर पर हम जानते हैं कि गणना का आरम्भ आदि मानव से हुआ था। अपनी वस्तुओं की गणना के लिए मनुष्य ने अपनी उंगलियों, छोटे पत्थरों, पौधों, इत्यादि का प्रयोग किया अथवा लकड़ी पर चिन्ह बनाकर या कुछ अन्य ऐसी विधियों के प्रयोग से गणना की। फिर मनुष्य ने समूहों में रहना तथा मिलना-जुलना आरम्भ किया और इस प्रकार उसे संख्याओं के लिए चिन्हों की आवश्यकता पड़ी ताकि वह दूसरों से सुचारू रूप से विचार विनिमय कर सके। यद्यपि इतिहासकार इस विषय पर एकमत नहीं हैं कि संख्यांकों (numerals) का आरम्भ कहाँ और कब हुआ तथापि प्राय: विश्वास किया जाता है कि संख्याओं का प्रयोग लगभग उतना पुराना है जितनी स्वयं मानव सभ्यता।

यदि हम आज से लगभग 5000 से 6000 वर्ष पहले के इतिहास पर दृष्टि डालें तो ज्ञात होगा कि उस समय मिस्रवासी तथा मेसोपोटामिया सभ्यता के निवासी संख्यांकों का विस्तृत प्रयोग करते थे। भिन्न-भिन्न



लगभग 3400 ई० पू० में मिट्टी के बर्तन के टुकड़े से प्रारम्भिक मिस्री संख्यांक



लगभग 500 ई० पू० में गूढ़ाक्षरों में लिखित (पवित्र) लिखावट। इसका तात्पर्य है कि "बाज राजा हरपून झील की भूमि से 6000 बन्दी बनाकर ले गया"।

सभ्यताओं में भिन्न-भिन्न प्रकार के संख्यांकों का विकास हुआ और इन संख्यांकों में भी समय के साथ-साथ परिवर्तन हुए। उदाहरणतया, मिस्रवासी आरम्भ में संख्याओं के लिए संकेतों के रूप में चित्रों का प्रयोग करते थे। यूनानी तथा हिब्रू लोग संख्याओं के लिए अपनी वर्णमाला के विभिन्न अक्षरों का प्रयोग करते थे। लगभग तृतीय शताब्दी के भारतीय शिला लेखों से ज्ञात होता है कि पुरातन भारतवासी अपनी संख्यांक प्रणाली में बहुत से संकेतों का प्रयोग किया करते थे।

। भारत म हुआ था। आठवीं शताब्दी के अन्त में भारतीय खगोलविद्या तथा गणित बगदाद के क पहुँचा। ऐसा माना जाता है कि कंक नामक एक भारतीय विद्वान, **ब्रह्मगुप्त** के **'ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त'** अल-मंसूर के दरबार में पहुँचा। बाद में इसका अनुवाद अरबी भाषा में हुआ। इस प्रकार भारतीय प्रणाली अरबों तक पहुँची। प्रसिद्ध अरब गणितज्ञ **अल-ख्वारिज़मी**, जो खगोल-शास्त्र की अनेक के भी लेखक हैं, ने इस अनुवाद के आधार पर अपना बहुत सा काम किया। **अल-ख्वारिज़मी** अपनी । "**अल-जबर**" (algebra) के लिए अत्यधिक प्रसिद्ध हैं। उन्होंने अंकगणित पर भी लिखा। उनकी ों का अनुवाद 'लेटिन' भाषा में हुआ और इस प्रकार हिन्दू-संख्यांक यूरोप में पहुँचे और हिन्दू-अरब हलाए।

दस अंकों 0, 1, 2, 3, ..., 9 तथा स्थानीय मान के सिद्धान्त के उपयोग से बनी इस संख्यांक-प्रणाली **लव प्रणाली (decimal system)** कहते हैं। आधार-10 के अतिरिक्त अन्य आधार वाली भी थीं और आज भी प्रचलित हैं। उदाहरणार्थ, बेबीलोन के निवासी **सेक्साजेसीमल प्रणाली** simal system) का प्रयोग करते थे जिसका आधार 60 होता है। जब हम घंटों, मिनटों तथा में समय नापते हैं तो हम आधार-60 का प्रयोग करते हैं यद्यपि हम इसमें स्थानीय मान के सिद्धान्त का हीं करते। आज के युग में कम्प्यूटर **आधार-2** अथवा **द्वि-आधार प्रणाली (binary system)** का रते हैं जिसमें केवल दो अंक 0 तथा 1 का प्रयोग होता है। परन्तु द्वि-आधार प्रणाली आज का कार नहीं है। यहाँ तक कि आदि मानव भी एक प्रकार की द्वि-आधार प्रणाली का प्रयोग करते थे। देयों तक, विभिन्न गणितज्ञों ने जिन्होंने संख्याओं का अध्ययन किया, इन्हें कई रहस्यमय तथा धार्मिक । 17वीं शताब्दी में महान जर्मन गणितज्ञ **गोटफ्रिड विलहेल्म लेबनिज** (1646-1716) जोकि एक धार्मिक , ने ईश्वर को अंक 1 तथा शून्य को अंक 0 से प्रदर्शित किया। उनका विश्वास था कि जिस प्रकार शून्य से ब्रह्मांड बनाया ठीक उसी प्रकार वे 0 तथा 1 इन दो अंकों से किसी भी संख्या को व्यक्त ; हैं।

कृत संख्याएँ तथा पूर्णांक (Natural Numbers and Integers)

गणन संख्याएँ 1,2,3, ... **प्राकृत संख्याएँ** कहलाती हैं। आपको याद होगा कि यदि हम किन्हीं संख्याओं का योग करें अथवा किन्हीं दो प्राकृत संख्याओं का गुणन करें तो हमें सदैव एक प्राकृत प्त होती है। अतः हम कहते हैं कि **प्राकृत संख्याएँ योग तथा गुणन की संक्रियाओं के** । **(closed)** हैं। परन्तु यदि हम किसी प्राकृत संख्या को किसी अन्य प्राकृत संख्या में से घटाएँ तो

मान प्रणाली तथा संख्यांक 0 का आविष्कार अन्य संख्यांकों के पश्चात् हुआ था। यद्यपि इस तथ्य -भिन्न मत हैं कि स्थानीय मान प्रणाली, जिसमें शून्य के लिए भी संकेत दिया गया, का आविष्कार । फिर भी प्रायः यह माना जाता है कि ऐसा करने की पहल हिन्दुओं ने की थी।

क्या होगा ? स्पष्ट है कि हमें सदा एक प्राकृत संख्या प्राप्त नहीं होगी। अतः यह आवश्यक है कि हम प्राकृत संख्याओं के निकाय का पूर्णांकों के निकाय में विस्तार करें। संख्याएँ ..., —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3,... पूर्णांक कहलाती हैं। यह सुगमतापूर्वक देखा जा सकता है कि यदि हम किन्ही दो पूर्णांकों का योग करें, किन्हीं दो पूर्णांकों का अन्तर लें अथवा किन्हीं दो पूर्णांकों का परस्पर गुणन करें तो हमें सदैव एक पूर्णांक ही प्राप्त होगा। परन्तु यदि किसी पूर्णांक को किसी अन्य पूर्णांक से भाग दें तो भागफल क्या होगा? निश्चित है कि हमें सदा एक पूर्णांक प्राप्त नहीं होगा। अतः हम कहते हैं कि **पूर्णांक विभाजन की संक्रिया के लिए संवृत नहीं होते। हम देखते हैं कि प्राकृत संख्याएँ भी विभाजन की संक्रिया के लिए संवृत नहीं होतीं।** इसलिए यह आवश्यक है कि हम इस संख्या-निकाय का और अधिक विस्तार करें जैसा कि अगले अनुच्छेद में किया गया है।

1.4 परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers)

अब हम आपका ऐसी संख्याओं से परिचय कराते हैं जो $\frac{p}{q}$ की तरह की हैं जहाँ p तथा q दोनों पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है। इस प्रकार की संख्याएँ **परिमेय संख्याएँ** कहलाती हैं। हम नीचे परिमेय संख्या की परिभाषा को दोहराते हैं।

परिमेय संख्या वह संख्या होती है जो $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखी जा सके, जहाँ p तथा q दोनों पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है। यदि q एक प्राकृत संख्या है तथा p और q में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं है तो हम कहते हैं कि **परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ निम्नतम पदों (lowest terms) में है।** कभी-कभी हम यह भी कहते हैं कि **p और q निम्नतम पदों में हैं।**

कोई परिमेय संख्या या तो धनात्मक (positive), या ऋणात्मक (negative) या शून्य हो सकती है। यह आसानी से देखा जा सकता है कि प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या होती है। (क्यों?) हम नीचे यह दिखाएँगे कि **परिमेय संख्याएँ योग, व्यवकलन, गुणन तथा विभाजन (शून्य के अतिरिक्त) की संक्रियाओं के लिए संवृत होती हैं।**

उपपत्ति: आइए, दो परिमेय संख्याएँ a तथा b लें। मान लीजिए, $a = \frac{p}{q}$ तथा $b = \frac{r}{s}$, जहाँ p, q, r तथा s सभी पूर्णांक हैं और $q \neq 0$, $s \neq 0$ हैं।

अब, $$a + b = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps}{qs} + \frac{qr}{qs}$$

अर्थात्, $$a + b = \frac{ps + qr}{qs}$$

परन्तु हम जानते हैं कि किन्ही दो पूर्णांकों का योग तथा किन्ही दो पूर्णांकों का गुणनफल भी एक पूर्णांक होता है। अतः ps, qr, qs तथा $ps + qr$ पूर्णांक हैं और $qs \neq 0$ क्योंकि $q \neq 0$, $s \neq 0$ है। इस प्रकार

$a+b$ दो पूर्णांकों का भागफल है जिसका हर (denominator) शून्य नहीं है। अत: $a+b$ एक परिमेय संख्या है।

अब, $ab = \frac{p}{q}\left(\frac{r}{s}\right)$

अर्थात्, $ab = \frac{pr}{qs}$

पुन:, pr और qs पूर्णांक हैं तथा $qs \neq 0$ है। अत: ab भी एक परिमेय संख्या है।

['दो परिमेय संख्याओं का अन्तर तथा भागफल (जहाँ हर शून्य नहीं है) भी एक परिमेय संख्या होती है' सिद्ध करना पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ दिया गया है।]

हम परिमेय संख्याओं के योग तथा गुणन के गुणधर्मों को नीचे दोहराते हैं:

यदि a, b, c परिमेय संख्याएँ हों तो

1.	$a + b = b + a$	[योग क्रमविनिमेय (commutative) है।]
2.	$a + (b + c) = (a + b) + c$	[योग सहचारी (associative) है।]
3.	$a + 0 = a$	[योज्य तत्समक (additive identity): 0]
4.	$a + (-a) = 0$	[योज्य प्रतिलोम (additive inverse): —a]
5.	$ab = ba$	[गुणन क्रमविनिमेय है।]
6.	$a(bc) = (ab)c$	[गुणन सहचारी है।]
7.	$a.1 = a$	[गुणनात्मक तत्समक (multiplicative identity): 1]
8.	$a\left(\frac{1}{a}\right) = 1, a \neq 0$	[गुणनात्मक प्रतिलोम (multiplicative inverse): $\frac{1}{a}$]
9.	$a(b + c) = ab + ac$	[गुणन योग पर वितरणात्मक (distributive) है।]

1.5 सांत तथा असांत दशमलव (Terminating and Non-terminating Decimals)

परिमेय संख्याओं को ऐसे दशमलवों में व्यक्त किया जा सकता है जो **सांत (terminating)** अर्थात् परिमित (finite) अथवा **असांत (non-terminating)** अर्थात् अपरिमित* (infinite) होते हैं। उदाहरणार्थ, $\frac{3}{5} = 0.6$, $-\frac{7}{64} = -0.109375$ तथा $\frac{637}{250} = 2.548$ उन परिमेय संख्याओं के उदाहरण हैं जो सांत दशमलव में व्यक्त की जा सकती हैं।

$\frac{5}{6} = 0.8333\ldots$, $\frac{3}{11} = 0.272727\ldots$ तथा $\frac{6}{7} = 0.857142857142\ldots$ उन परिमेय संख्याओं के

---

*अपरिमित दशमलव के परिशुद्ध अर्थ के लिए उच्चस्तरीय संकल्पनाओं (concepts) की आवश्यकता है जो इस पुस्तक की सीमा के बाहर हैं।

उदाहरण हैं जो असांत दशमलव में व्यक्त की जा सकती हैं। इन असांत दशमलवों में हम देखते हैं कि कुछ अंकों के समूह की पुनरावृत्ति होती है। अतः इस प्रकार के दशमलवों को **आवर्ती दशमलव (recurring or periodic decimals)** कहा जाता है। एक आवर्ती दशमलव के आवर्ती भाग के ऊपर रेखा लगाने का प्रचलन है। उदाहरणार्थ, $\frac{5}{6}$ तथा $\frac{6}{7}$ को हम इस प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{5}{6} = 0.8\overline{3} \text{ तथा } \frac{6}{7} = 0.\overline{857142}, \text{ इत्यादि।}$$

यह सिद्ध* किया जा सकता है कि **प्रत्येक परिमेय संख्या एक दशमलव में व्यक्त की जा सकती है जो या तो सांत अथवा असांत आवर्ती होता है।**

जब कोई परिमेय संख्या दशमलव में व्यक्त की जानी होती है तो हम कैसे बता सकते हैं कि यह दशमलव सांत होगा अथवा असांत आवर्ती होगा। परिमेय संख्याओं $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{11}$ तथा $\frac{6}{7}$ के दशमलव निरूपणों का पुनः अध्ययन कीजिए।

यह सिद्ध* किया जा सकता है कि निम्नतम पदों की कोई परिमेय संख्या सांत दशमलव में तभी तथा केवल तभी व्यक्त की जा सकती है यदि उसके हर में 2 तथा 5 के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य (prime) गुणनखण्ड न हो। इस प्रकार, यदि किसी परिमेय संख्या के हर में 2 तथा 5 के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य गुणनखण्ड है तो उस संख्या का प्रसार (expansion) असांत आवर्ती होगा।

आपको याद होगा कि एक सांत दशमलव दो पूर्णांकों के भागफल के रूप में लिखा जा सकता है। अतः **प्रत्येक सांत दशमलव एक परिमेय संख्या के रूप में लिखा जा सकता है।**

उदाहरण 1 : 0.0625 को परिमेय संख्या के रूप में लिखिए।

हल : $0.0625 = \frac{625}{10000}$

यदि हम चाहें तो $\frac{625}{10000}$ को निम्नतम पदों में लिख सकते हैं। हम देखते हैं कि

$$\frac{625}{10000} = \frac{1}{16}$$

आइए, अब उदाहरणार्थ, एक **असांत आवर्ती दशमलव** $0.\overline{3}$ लें। **क्या हम एक ऐसी परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं जिसे यदि दशमलव में व्यक्त किया जाए तो प्रसार $0.\overline{3}$ हो ?**

आइए, दी गई दशमलव संख्या को, उदाहरणार्थ, x से व्यक्त करें।

तब, $x = 0.3333...$ (1)

हम जानते हैं कि यदि किसी दशमलव को 10 या 10 की किसी घात (power) से गुणा किया जाए तो परिणामस्वरूप दशमलव बिन्दु दाईं ओर उपयुक्त स्थान पर स्थानान्तरित हो जाएगा।

---

*उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।

(1) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करने पर हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$10x = 3.3333\ldots \qquad (2)$$

अब यदि (1) को (2) में से घटाएँ तो हम देखते हैं कि दशमलव का आवर्ती भाग समाप्त हो जाता है।

इस प्रकार, $9x = 3$

अत: $x = \frac{1}{3}$, जो अभीष्ट परिमेय संख्या है।

आइए, एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 2: एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए, जिसे यदि दशमलव में व्यक्त किया जाए तो प्रसार $0.2\overline{34}$ प्राप्त हो।

हल : मान लीजिए, $x = 0.23444\ldots \qquad (1)$

x को केवल 10 या 10 की घात से गुणा करके तथा (1) को परिणाम में से घटाने पर हमें कुछ अधिक सहायता नहीं मिलेगी। (क्यों ?) इसलिए हम निम्न प्रकार से आगे बढ़ते हैं :

(1) के दोनों पक्षों को 10^2 से गुणा करके हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$100\,x = 23.444\ldots \qquad (2)$$

हम देखते हैं कि (2) में आवर्ती भाग दशमलव बिन्दु के पश्चात है। अब हम उदाहरण 1 की स्थिति में पहुँच गए हैं।

(2) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करके हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$1000x = 234.444\ldots \qquad (3)$$

(3) में से (2) को घटाने पर,

$$900x = 211$$

अत: $x = \frac{211}{900}$, जो अभीष्ट परिमेय संख्या है।

उदाहरण 3: वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए जिसे यदि दशमलव में व्यक्त किया जाए तो प्रसार $4.6\overline{732}$ प्राप्त हो।

हल : मान लीजिए $x = 4.6732732\ldots \qquad (1)$

पुन:, सर्वप्रथम हम दशमलव बिन्दु के बाद केवल आवर्ती भाग ही रखना चाहेंगे। आइए (1) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$10x = 46.732732\ldots \qquad (2)$$

अब हम उदाहरण 1 की स्थिति में आ गए हैं। हम (2) के दोनों पक्षों को 10^3 से गुणा करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$10^4x = 46732.732732\ldots \qquad (3)$$

(3) में से (2) को घटाने पर,

$$9990x = 46686$$

इस प्रकार, $x = \frac{46686}{9990} = \frac{7781}{1665}$, जो कि वांछित परिमेय संख्या है ।

1.6 परिमेय संख्याओं में क्रम-सम्बन्ध (Ordering Among Rationals)

आइए अब परिमेय संख्याओं में क्रम-सम्बन्ध का अध्ययन करें। हम किसी संख्या के किसी अन्य संख्या से **छोटी (या बड़ी)** होने को दर्शाने के लिए संकेत $<$ (या $>$) प्रयुक्त करते हैं। उदाहरणार्थ, $-2 < \frac{4}{3}$, $\frac{3}{2} < 5$, $0 > -2$, $\frac{23}{41} < \frac{18}{23}$, इत्यादि ।

अब यह स्पष्ट है कि यदि a **तथा** b **परिमेय संख्याएँ हैं तो या तो** $a = b$ **या** $a < b$ **या** $a > b$ ।

दूसरे शब्दों में, यदि दो संख्याएँ दी हों तो उपरोक्त तीन अवस्थाओं में से एक तथा केवल एक अवस्था ही सम्भव है । स्पष्ट कारणों से हम इसे **त्रिविकल्पता अभिगृहीत (trichotomy axiom)** कहते हैं ।

अब हम $<$ **के निम्न गुणधर्मों** को दोहराते हैं :

यदि a, b तथा c परिमेय संख्याएँ हैं और

1. $a < b$ तथा $b < c$ तो $a < c$ [$<$ की संक्रामिता (transitivity of $<$)]
2. $a < b$ तो $a + c < b + c$ [योज्य गुणधर्म]
3. $a < b$ तथा $c > 0$ तो $ac < bc$ [गुणन गुणधर्म]

निश्चय ही गुणधर्म 2 तथा 3 बताते हैं कि हम किसी असमिका (inequality) के दोनों पक्षों में बिना उसकी दिशा परिवर्तन किए, कोई परिमेय संख्या जोड़ सकते हैं अथवा दोनों पक्षों को किसी धनात्मक परिमेय संख्या से गुणा कर सकते हैं । हम इन गुणधर्मों का प्रयोग यह सिद्ध करने में करेंगे कि **किन्हीं दो भिन्न परिमेय संख्याओं के बीच हम सदैव एक परिमेय संख्या प्राप्त कर सकते हैं ।**

उपपत्ति : किन्हीं दो भिन्न परिमेय संख्याओं पर विचार कीजिए । त्रिविकल्पता अभिगृहीत के अनुसार इनमें से एक दूसरी से छोटी होगी । मान लीजिए हम छोटी संख्या को a तथा बड़ी संख्या को b से व्यक्त करते हैं ।

अर्थात्, $a < b$

तब, $a + a < b + a$ (गुणधर्म 2)

या, $a < \frac{a+b}{2}$ (i) (गुणधर्म 3)

पुनः, $a < b$

तब, [illegible]

या, [illegible] (ii)

(i), [illegible]

अब क्योंकि हम जानते हैं कि परिमेय संख्याएँ योग तथा गुणन की संक्रियाओं के लिए संवृत होती हैं, अत: $\frac{a+b}{2}$ एक परिमेय संख्या है।

इस प्रकार यदि कोई दो परिमेय संख्याएँ दी हों तो हम दोनों के बीच सदैव एक अन्य परिमेय संख्या प्राप्त कर सकते हैं। ऐसी एक संख्या दी हुई दोनों संख्याओं का मध्यमान (average) ही है। यदि उपरोक्त विधि का बार-बार प्रयोग किया जाए तो हम सुगमतापूर्वक देख सकते हैं कि किन्हीं दो दी हुई परिमेय संख्याओं के बीच बहुत सी अन्य परिमेय संख्याएँ प्राप्त की जा सकती हैं। अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : $\frac{2}{5}$ तथा $\frac{3}{4}$ के बीच कोई तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल :

ऐसी एक संख्या दी गई दोनों संख्याओं का मध्यमान अर्थात्

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{4}\right) \text{ या } \frac{23}{40} \text{ है।}$$

अब, $\frac{2}{5} < \frac{23}{40} < \frac{3}{4}$

अभी हमें दो परिमेय संख्याएँ और ज्ञात करनी हैं। ऐसी एक संख्या $\frac{2}{5}$ तथा $\frac{23}{40}$ के बीच तथा अन्य $\frac{23}{40}$ तथा $\frac{3}{4}$ के बीच प्राप्त की जा सकती है।

$\frac{2}{5}$ तथा $\frac{23}{40}$ के बीच, उनका मध्यमान अर्थात्

$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}+\frac{23}{40}\right)$ या $\frac{39}{80}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात्, $\frac{2}{5} < \frac{39}{80} < \frac{23}{40}$

इसी प्रकार, $\frac{23}{40}$ तथा $\frac{3}{4}$ के बीच $\frac{1}{2}\left(\frac{23}{40}+\frac{3}{4}\right)$ या $\frac{53}{80}$ एक परिमेय संख्या है।

अर्थात्, $\frac{23}{40} < \frac{53}{80} < \frac{3}{4}$

इस प्रकार, हमने $\frac{2}{5}$ तथा $\frac{3}{4}$ के बीच में तीन परिमेय संख्याएँ $\frac{39}{80}$, $\frac{23}{40}$ तथा $\frac{53}{80}$ ज्ञात कर ली हैं।

***उदाहरण 2 :** सिद्ध कीजिए कि यदि a, b, c तीन परिमेय संख्याएँ हैं और $a < b$ तथा < 0, तो $ac > bc$ है।

हल : हमें दिया गया है कि $c < 0$

आइए, दोनों ओर $(-c)$ जोड़ें। इस प्रकार,

$c + (-c) < 0 + (-c)$ (गुणधर्म 2)

अर्थात्, $0 < (-c)$

या, $(-c) > 0$

अब क्योंकि, $a < b$ तथा $(-c) > 0$,

अतः, $a(-c) < b(-c)$ (गुणधर्म 3)

अर्थात्, $-ac < -bc$

आइए, दोनों ओर $ac + bc$ जोड़ें। इस प्रकार,

$ac + bc - ac < ac + bc - bc$ (गुणधर्म 2)

अर्थात्, $bc < ac$

या, $ac > bc$, जो इष्ट परिणाम है।

दूसरे शब्दों में, यदि हम किसी असमिका के दोनों पक्षों को एक ऋणात्मक परिमेय संख्या से गुणा करें तो असमिका की दिशा विपरीत हो जाती है।

उदाहरण 3 : यदि a और b ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं कि $a < b$ है तो

$$a < a + \frac{b-a}{n} < b \text{ होगा,}$$

जहाँ n, 1 से बड़ी कोई प्राकृत संख्या है।

हल : हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि

$$a < a + \frac{b-a}{n} < b$$

यह सिद्ध करना निम्न सिद्ध करने के समान है :

(i) $a < a + \frac{b-a}{n}$

(ii) $a + \frac{b-a}{n} < b$

हमें दिया हुआ है कि $a < b$

इसलिए, $0 < b - a$ (1)

हम (1) के दोनों पक्षों को n से भाग देते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$0 < \frac{b-a}{n} \quad (2)$$

(2) के दोनों पक्षों में 'a' जोड़ने पर हमें (i) में दिया वाँछित परिणाम प्राप्त हो जाता है।

(ii) में हम दिखाना चाहते हैं कि

$$\frac{b-a}{n} < b - a$$

या, $n(b-a) - (b-a) > 0$

या, $(n-1)(b-a) > 0$

अब हम (1) के दोनों पक्षों को $(n-1)$ से गुणा करते हैं। [हम देखते हैं कि क्योंकि $n > 1$ है इसलिए $(n-1) > 0$ है।] हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$0 \times (n-1) < (b-a)(n-1)$$

अर्थात्, $0 < (b-a)(n-1)$, जो कि निस्सन्देह वाँछित परिणाम है।

हम इस उदाहरण के परिणाम का प्रयोग दो दी हुई परिमेय संख्याओं के बीच में चाहें जितनी परिमेय संख्याएँ ज्ञात करने के लिए कर सकते हैं। यह सम्भवतः औसत की विधि से सरल है। आइए उदाहरण 1 की संख्याएँ लें और इस विधि से उनके बीच में तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात करें। हमें निम्न संख्याएँ प्राप्त होती हैं :

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)=\frac{23}{40};\ \frac{2}{5}+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)=\frac{31}{60};\ \text{तथा}$$

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)=\frac{39}{80}\text{।}$$

प्रश्नावली 1.1

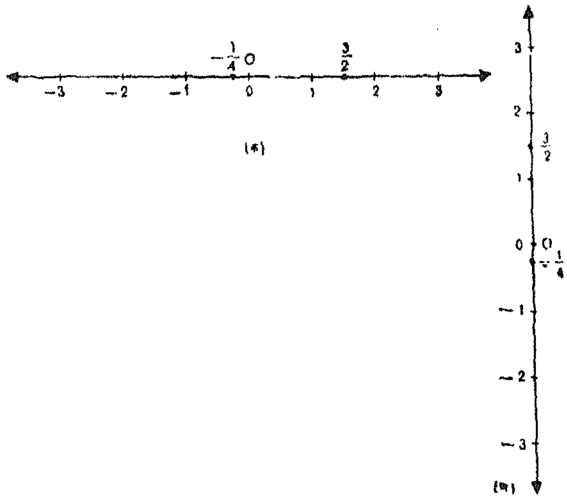
1. सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो परिमेय संख्याओं का अन्तर भी एक परिमेय संख्या होती है।
2. सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो परिमेय संख्याओं का भागफल (हर शून्य के अतिरिक्त) भी एक परिमेय संख्या होती है।
3. निम्न परिमेय संख्याओं को सांत अथवा असांत आवर्ती दशमलव के रूप में लिखिए :

   (i) $\frac{31}{32}$ (ii) $\frac{86}{125}$ (iii) $\frac{7}{13}$ (iv) $\frac{16}{17}$

   [पाठक पहले यह निश्चित कर लें कि उपरोक्त में से कौन सी संख्याओं का प्रसार सांत होगा और कौन सी संख्याओं का असांत आवर्ती।]
4. एक ऐसी परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए, जिसे यदि दशमलव में व्यक्त किया जाए तो प्रसार 2.376 प्राप्त हो।
5. एक ऐसी परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए, जो यदि दशमलव में व्यक्त की जाए तो प्रसार $22.378\overline{2378}$ प्राप्त हो।
6. $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{2}$ के बीच दो परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
7. $-\frac{5}{6}$ तथा $\frac{3}{8}$ के बीच तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

1.7 परिमेय संख्याओं का ज्यामितीय निरूपण (Geometrical Representation of Rational Numbers)

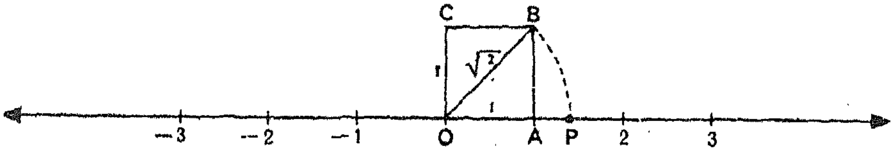
हम यहाँ विस्तार से नहीं बताएँगे कि एक परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर कैसे निरूपित किया जाता है। परन्तु हम यह बताना चाहेंगे कि हम एक प्रचलित रीति से संख्या रेखा को क्षैतिज रेखा (horizontal line) के रूप में खींचते आए हैं जैसा कि आकृति 1.1 (क) में दिखाया गया है। परन्तु गणितीय दृष्टि से यह आवश्यक नहीं है। हम संख्या रेखा को ऊर्ध्वाधर अर्थात् खड़ी रेखा (vertical line) के रूप में भी खींच सकते हैं जैसा कि आकृति 1.1 (ख) में दिखाया गया है। कोई स्वेच्छ बिन्दु (arbitrary point), 0 प्रस्थान बिन्दु (*starting* point) अर्थात् मूलबिन्दु (origin) के रूप में लिया जाता है। एक स्वेच्छ दूरी (arbitrary length) को मात्रक (unit) चुना जाता है और संख्या रेखा पर मूलबिन्दु के ऊपर तथा नीचे चुनी हुई मात्रक के पदों में समान दूरी पर चिन्ह लगाए जाते हैं। इस प्रकार मूलबिन्दु संख्या 0 को निरूपित करता है। धनात्मक संख्याओं को मूलबिन्दु के ऊपर तथा ऋणात्मक संख्याओं को मूलबिन्दु के नीचे निरूपित करने का प्रचलन है।



आकृति 1.1

परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करने के पश्चात् हम स्वयं से निम्न (स्वाभाविक) प्रश्न पूछते हैं: क्या संख्या रेखा पर ऐसे बिन्दु हैं जो किसी परिमेय संख्या को निरूपित नहीं करते? हम कहते हैं कि वस्तुत: ऐसे बिन्दु हैं। अब हम पहले एक ऐसा ही बिन्दु प्राप्त करने का प्रयत्न करेंगे।

आइए, मात्रक दूरी OA पर एक वर्ग OABC की रचना करें जैसा कि आकृति 1.2 में दिखाया गया है। OB इस वर्ग का एक विकर्ण है।



आकृति 1.2

पाइथैगोरस प्रमेय द्वारा,

$$OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{2}$$

O को केन्द्र तथा OB को त्रिज्या (radius) लेकर हम एक चाप खींचते हैं जो संख्या रेखा को बिन्दु P पर काटता है जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। स्पष्ट रूप से OP = OB = $\sqrt{2}$। इस प्रकार बिन्दु P संख्या $\sqrt{2}$ को निरूपित करता है। अब हम सिद्ध करेंगे कि $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है।

उपपत्ति : उपपत्ति की जो विधि हम अपनाएँगे उसे **विरोध (contradiction)** की विधि कहा जाता है। अर्थात्, पहले हम यह कल्पना कर लेते हैं कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है और फिर हम अपनी कल्पना के विरोध पर पहुँचते हैं। इस विधि को **असंगति प्रदर्शन (reductio ad absurdum)** की विधि भी कहते हैं।

हम मान लेते हैं कि $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। अतः $\sqrt{2}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त करना सम्भव है जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। आइए, यह भी मान लें कि p तथा q निम्नतम पदों में हैं।

अब, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

इस प्रकार, $2 = \frac{p^2}{q^2}$

अथवा, $p^2 = 2q^2$ (1)

अतः p^2 एक सम पूर्णांक है। (क्यों ?)

इसलिए* p भी एक सम पूर्णांक है।

अतः हम p को निम्न रूप से लिख सकते हैं :

$p = 2r$, जहाँ r एक पूर्णांक है।

(1) में प्रतिस्थापन (substitution) करके हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$4r^2 = 2q^2$

या, $q^2 = 2r^2$

पुनः उपरोक्त तर्क से ही हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि q एक सम पूर्णांक है। इस प्रकार p तथा q दोनों ही सम पूर्णांक हैं। और इसलिए इनमें एक उभयनिष्ठ गुणनखंड 2 होना चाहिए। परन्तु यह हमारी इस कल्पना, कि p तथा q निम्नतम पदों में हैं, का विरोध करता है। अतः $\sqrt{2}$ परिमेय संख्या नहीं है।

इस प्रकार हमने संख्या रेखा पर एक बिन्दु प्राप्त कर लिया है जो किसी परिमेय संख्या को निरूपित नहीं करता।

---

* **"यदि p^2 एक सम पूर्णांक है तो p भी सम पूर्णांक है" स्वयं इसे भी सिद्ध करने की आवश्यकता है।** निश्चय ही इस कथन की अपेक्षा इसकी **प्रतिस्थिति (contrapositive)** सिद्ध करना अधिक आसान है अर्थात् **"यदि p सम पूर्णांक नहीं है तो p^2 भी सम पूर्णांक नहीं है"**।

यदि p सम पूर्णांक नहीं है तो यह $p = 2k+1$ के रूप की संख्या है जहाँ k एक पूर्णांक है।

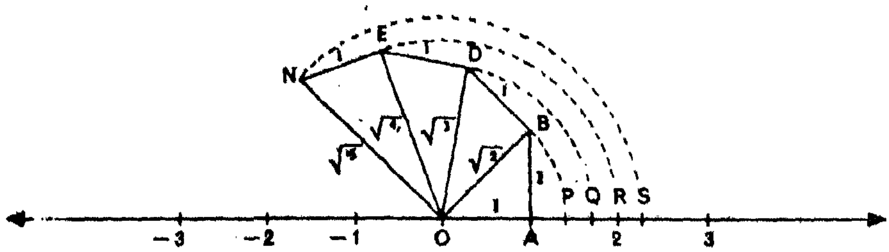
इस प्रकार, $p^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2+2k) + 1$

अब, $2k^2+2k$ एक पूर्णांक है। (क्यों ?)

अतः p^2, उदाहरणार्थ, $p^2 = 2m+1$ के रूप की संख्या है जहाँ m एक पूर्णांक है। इससे स्पष्ट है कि p^2 सम पूर्णांक नहीं है।

यह तथ्य कि संख्या रेखा पर ऐसे अन्य बिन्दु भी हैं जो किसी परिमेय संख्या को निरूपित नहीं करते, निम्न विधि से दिखाया जा सकता है :

वर्ग OABC के विकर्ण OB पर हम एक समकोण त्रिभुज OBD की रचना करते हैं जिसका समकोण B पर है और BD=OA (मात्रक दूरी) है जैसा कि आकृति 1.3 में दिखाया गया है।



आकृति 1.3

पुनः, पाइथैगोरस प्रमेय से,

$$OD=\sqrt{OB^2+BD^2} = \sqrt{3}$$

O को केन्द्र और OD को त्रिज्या लेकर हम एक चाप खींचते हैं जो संख्या रेखा को बिन्दु Q पर काटता है जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। स्पष्ट रूप से, $OQ=OD=\sqrt{3}$। इस प्रकार, बिन्दु Q संख्या $\sqrt{3}$ को निरूपित करता है। अब यह सिद्ध करना कि $\sqrt{3}$ परिमेय संख्या नहीं है पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ दिया गया है।

यदि हम इस विधि की पुनरावृत्ति करें तो हम पायेंगे कि संख्या रेखा पर ऐसे और भी बिन्दु हैं जो किसी परिमेय संख्या को निरूपित नहीं करते। [निस्संदेह, यह स्पष्ट है कि हम कुछ ऐसे बिन्दु भी प्राप्त करते हैं जो $\sqrt{4}$ जैसी परिमेय संख्याओं को निरूपित करते हैं।]

1.8 अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers)

हमने पिछले अनुच्छेद में देखा कि संख्या रेखा पर ऐसे बिन्दु हैं जो किसी परिमेय संख्या को निरूपित नहीं करते। इससे संख्या-निकाय के विस्तार की आवश्यकता है जिसमें ऐसी संख्याएँ भी सम्मिलित हों जो परिमेय नहीं हैं जैसे कि $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, इत्यादि। ऐसी संख्याएं अपरिमेय संख्याएं कहलाती हैं; इस प्रकार, अपरिमेय संख्या वह संख्या होती है जो $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त नहीं की जा सकती, जहाँ p तथा q दोनों पूर्णांक हों और $q \neq 0$ हो।

अपरिमेय संख्या का एक अन्य उदाहरण संख्या* π है जो एक वृत्त की परिधि का उसके व्यास से अनुपात (ratio) होता है। यह अनुपात एक स्थिरांक (constant) होता है और वृत्त की त्रिज्या पर निर्भर नहीं

---

* π को अपरिमेय संख्या सिद्ध करना इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।

होता। निश्चित रूप से बेबीलोन तथा मिस्र के लोग यह जानते थे कि एक वृत्त की परिधि का उसके व्यास से अनुपात एक स्थिरांक है, यद्यपि इस अनुपात को व्यक्त करने के लिए उन्होंने संकेत π का प्रयोग नहीं किया। लगभग 2000 ई० पू० बेबीलोन के लोग π के मान के लिए $3\frac{1}{8}$ और मिस्रवासी $4\left(\frac{64}{81}\right)$ का प्रयोग करते थे। **आर्यभट्ट (जन्म 476 ई०)** ने 499 ई० में अपनी प्रसिद्ध कृति **'आर्यभट्टीयम्'** में संकेत किया है कि π का मान 3.1416 होता है। आपको याद होगा कि हम π का मान $\frac{22}{7}$ प्रयोग करते आए हैं। परन्तु इसका यह अर्थ नहीं है कि π एक परिमेय संख्या है। $\frac{22}{7}$ केवल π के मान के सन्निकट एक संख्या है।

यह जानना अत्यन्त रुचिकर है कि तीव्रगति के इलैक्ट्रॉनिक कम्प्यूटरों के आगमन से, फरवरी 1967 ई० में पैरिस के परमाणु ऊर्जा आयोग में काम करने वाले दो महानुभावों ने 5 लाख दशमलव स्थानों तक π का मान निकाला था।

क्या दो अपरिमेय संख्याओं का योग भी अपरिमेय है? स्पष्ट है, सदा ऐसा नहीं होता। उदाहरणार्थ, दो अपरिमेय संख्याएँ $\sqrt{2}$ तथा $-\sqrt{2}$ लीजिए। इन संख्याओं का योग 0 है। इस प्रकार **अपरिमेय संख्याएँ योग की संक्रिया के लिए संवृत नहीं हैं।**

[पाठक यह सिद्ध करे कि **अपरिमेय संख्याएँ व्यवकलन,** गुणन तथा विभाजन **की संक्रियाओं के लिए संवृत नहीं हैं।**]

उदाहरण 1 : सिद्ध कीजिए कि $3-\sqrt{2}$ अपरिमेय है।

हल : हम इसे असंगति प्रदर्शन की विधि से हल कर सकते हैं। हम मान लेते हैं कि $3-\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। हम इसे, उदाहरणार्थ, r से व्यक्त करते हैं।

तब, $r = 3-\sqrt{2}$

अर्थात्, $\sqrt{2} = 3 - r$

परन्तु $3 - r$ परिमेय संख्या है। (क्यों?)

जिससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $\sqrt{2}$ भी परिमेय संख्या है। परन्तु, निश्चय ही यह असत्य है।
इस प्रकार हमें अपनी ही कल्पना का विरोध प्राप्त हो गया।
अत: $3-\sqrt{2}$ अपरिमेय है।

उदाहरण 2 : सिद्ध कीजिए $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ अपरिमेय है।

हल : हम कल्पना करते हैं कि $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ परिमेय संख्या है। हम इसे, उदाहरणार्थ, r से व्यक्त करते हैं।

तब, $r = \sqrt{2}+\sqrt{3}$

अत: $r^2 = 5 + 2\sqrt{6}$

अर्थात्, $\sqrt{6} = \frac{r^2-5}{2}$

परन्तु $\frac{r^2 - 5}{2}$ परिमेय है। (क्यों?) जिससे यह निष्कर्ष निकलता है कि $\sqrt{6}$ भी परिमेय है।

वस्तुत: यह असत्य है।

[पाठक यह सिद्ध करें कि $\sqrt{6}$ अपरिमेय है।]

हम पुन: विरोध की स्थिति में पहुँच गए हैं।

अत: $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ अपरिमेय है।

1.9 दशमलवों से अपरिमेय संख्याओं का सन्निकटन (Approximation of Irrational Numbers by Decimals)

अपरिमेय संख्या $\sqrt{2}$ पर विचार कीजिए। हम जानते हैं कि $1^2 = 1$ तथा $2^2 = 4$ है क्योंकि दी हुई अपरिमेय संख्या का वर्ग 2 है, अत: यह स्पष्ट है कि

$$1^2 < (\sqrt{2})^2 < 2^2$$

अर्थात्, $$1 < \sqrt{2} < 2$$

इस प्रकार $\sqrt{2}$, 1 तथा 2 के बीच की एक संख्या है। परन्तु यह संख्या $\sqrt{2}$ का एक अपरिष्कृत (crude) सन्निकटन है।

आइए, इससे उत्तम सन्निकटन प्राप्त करने का प्रयत्न करें। हम देखते हैं कि

$$(1.1)^2 = 1.21$$
$$(1.2)^2 = 1.44$$
$$(1.3)^2 = 1.69$$
$$(1.4)^2 = 1.96$$
$$(1.5)^2 = 2.25$$

इस प्रकार, $$(1.4)^2 < (\sqrt{2})^2 < (1.5)^2$$

अर्थात्, $$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$$

हम पुन: देखते हैं कि

$$(1.41)^2 = 1.9881$$
$$(1.42)^2 = 2.0164$$

इस प्रकार, $$(1.41)^2 < (\sqrt{2})^2 < (1.42)^2$$

अर्थात्: $$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

इसी विधि का प्रयोग करते हुए हम संख्या $\sqrt{2}$ का अधिक उत्तम सन्निकटन प्राप्त कर सकते हैं।

इस प्रकार,

$$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$$
$$1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$$
$$1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$$
$$1.414213 < \sqrt{2} < 1.414214$$
$$1.4142135 < \sqrt{2} < 1.4142136,$$ इत्यादि।

हम देखते हैं कि हम संख्या $\sqrt{2}$ के उत्तरोत्तर सन्निकटनों के दशमलवों में कोई आवर्ती भाग प्राप्त नहीं करते हैं। वास्तव में कुछ लेखक, परिमेय संख्याओं को असांत* आवर्ती दशमलव के रूप में तथा अपरिमेय संख्याओं को असांत अनावर्ती (non-recurring) दशमलव के रूप में परिभाषित करते हैं।

1.10 वास्तविक संख्याएँ (Real Numbers)

परिमेय तथा अपरिमेय संख्याएँ मिलकर वास्तविक संख्याएँ कहलाती हैं। वास्तविक संख्याओं में योग, व्यवकलन, गुणन तथा विभाजन की संक्रियाएँ संभव हैं। इन संक्रियाओं का गहन विवरण देना इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। आपको याद होगा कि वास्तविक संख्याओं में योग तथा गुणन की संक्रियाओं के वे सभी गुणधर्म (1-9) होते हैं जो कि अनुच्छेद 1.4 में दिए जा चुके हैं। इसके अतिरिक्त वास्तविक संख्याओं में भी क्रम-सम्बन्ध** होता है। त्रिविकल्पता अभिगृहीत भी इन संख्याओं में सत्य होता है। इनके अतिरिक्त, यदि a, b, c कोई तीन वास्तविक संख्याएँ हैं और

1. $a < b$ तथा $b < c$ तो $a < c$ ($<$ की संक्रामिता)
2. $a < b$ तो $a+c < b+c$ (योज्य गुणधर्म)
3. $a < b$ तथा $c > 0$ तो $ac < bc$ (गुणन गुणधर्म)

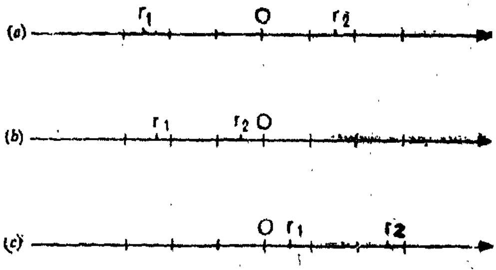
निश्चित रूप से गुणधर्म 2 तथा 3 हमें बताते हैं कि हम किसी असमिका की दिशा में परिवर्तन किए बिना उसके दोनों पक्षों में कोई भी वास्तविक संख्या जोड़ सकते हैं अथवा दोनों पक्षों को किसी भी धनात्मक वास्तविक संख्या से गुणा कर सकते हैं।

यह सिद्ध करना कि "जब हम किसी असमिका के दोनों पक्षों को किसी ऋणात्मक वास्तविक संख्या से गुणा करते हैं तो असमिका की दिशा विपरीत हो जाती है" पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ दिया गया है।

---

* एक सांत दशमलव को दशमलव के अन्त में शून्य लगाकर असांत आवर्ती दशमलव के रूप में भी लिखा जा सकता है। उदाहरणार्थ, $0.25 = 0.2500\ldots$

** हम यह दिखाएँगे कि हम दो वास्तविक संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करके उनकी तुलना कैसे करते हैं। मान लीजिए r_1 तथा r_2 दो वास्तविक संख्याएँ हैं। यदि संख्या r_2 को निरूपित करने वाला बिन्दु संख्या r_1 को निरूपित करने वाले बिन्दु के दाईं ओर है तो हम कहते हैं कि $r_1 < r_2$। (देखिए आकृति 1.4)



आकृति 1.4

संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु एक वास्तविक संख्या को निरूपित करता है और विलोमतः प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा के किसी एक बिन्दु से निरूपित किया जा सकता है। साथ ही, किसी परिमेय संख्या को असांत आवर्ती दशमलव के रूप में तथा किसी अपरिमेय संख्या को असांत अनावर्ती दशमलव के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि परिमेय तथा अपरिमेय संख्याएँ मिलकर वास्तविक संख्याएँ कहलाती हैं, अतः निष्कर्ष निकलता है कि **कोई भी वास्तविक संख्या एक असांत दशमलव के रूप में व्यक्त की जा सकती है।**

वास्तविक संख्याओं का एक अति महत्वपूर्ण गुणधर्म है "पूर्णता" (completeness) जिसका वर्णन हम यहाँ नहीं करेंगे।

प्रश्नावली 1.2

1. संख्या रेखा पर निम्न संख्याओं का निरूपण करने वाले बिन्दुओं को अंकित कीजिए :

   $-4,\ 3.5,\ -2.7,\ 1.9,\ \frac{4}{9},\ 4\frac{1}{8}$
2. संख्या रेखा पर एक मात्रक दूरी लीजिए तथा संख्याओं $2\sqrt{2}$ तथा $-2\sqrt{2}$ का निरूपण करने वाले बिन्दुओं को अंकित कीजिए।
3. क्या $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{45}}$ परिमेय संख्या है ? क्या $\left(\sqrt{7}+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2$ परिमेय संख्या है ?
4. क्या 1.01001000100001... अपरिमेय है ? क्यों ?
5. यदि p^2, 3 का पूर्णांक गुणज (integer multiple) हो तो सिद्ध कीजिए कि p भी 3 का पूर्णांक गुणज होगा।

   [संकेत : यदि p, 3 का पूर्णांक गुणज नहीं है तो यह $3k+1$ या $3k+2$ के रूप की संख्या है जहाँ k एक पूर्णांक है।]
6. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है।
7. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{6}$ एक अपरिमेय संख्या है।
8. कोई दो ऐसी अपरिमेय संख्याएँ बताइए जिनका अन्तर एक परिमेय संख्या है।
9. कोई दो ऐसी अपरिमेय संख्याएँ बताइए जिनका अन्तर एक अपरिमेय संख्या है।
10. कोई दो ऐसी अपरिमेय संख्याएँ बताइए जिनका गुणनफल एक परिमेय संख्या है।
11. कोई दो ऐसी अपरिमेय संख्याएँ बताइए जिनका गुणनफल एक अपरिमेय संख्या है।
12. सिद्ध कीजिए कि संख्याएँ $5\sqrt{3}$ तथा $5+\sqrt{3}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं।
13. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

14. सिद्ध कीजिए कि द्विघात समीकरण $x^2 - x - 3 = 0$ के दोनों मूल (roots) अपरिमेय हैं।

15. दो संख्याओं 6.556 तथा 6.557 में से कौन सी संख्या $\sqrt{43}$ का उत्तम (निकटतम) सन्निकटन है ?

16. ऐसी दो संख्याएँ a तथा b निर्धारित कीजिए कि $a < \sqrt{10} < b$ तथा $b - a < 0.1$ ।

17. सिद्ध कीजिए कि किन्हीं दो वास्तविक संख्याओं के बीच हम सदैव एक अन्य वास्तविक संख्या प्राप्त कर सकते हैं।

*18. यदि a, b तथा c वास्तविक संख्याएँ हों और $a < b$ तथा $c < 0$, तो सिद्ध कीजिए कि $ac > bc$ ।

1.11 मुख्य संकल्पनाएँ (Key Concepts)

प्राकृत संख्याएँ	विरोध (असंगति प्रदर्शन) द्वारा उपपत्ति
पूर्णांक	प्रतिस्थिति
परिमेय संख्याएँ	सांत दशमलव
अपरिमेय संख्याएँ	असांत आवर्ती दशमलव
वास्तविक संख्याएँ	असांत अनावर्ती दशमलव
संवृत गुणधर्म (closure property)	त्रिविकल्पता अभिगृहीत
वास्तविक संख्याओं में क्रम-सम्बन्ध	

1.12 अग्रिम अध्ययन हेतु सुझाव (Suggestions for Further Reading)

परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं के उत्तम वर्णन के लिए पाठक निम्न पुस्तक का अध्ययन करें :

[1] I. Niven : **Numbers : Rational and Irrational**, The L. W. Singer Company, New York (U.S.A.), 1961.

कुछ उच्चस्तरीय अध्ययन के लिए निम्न पुस्तक है :

[2] R. Courant and H. Robbins : **What is Mathematics ?** Oxford University Press, New York (U.S.A.), 1963.

एक अन्य पुस्तक, जिसमें केवल परिमेय संख्याओं का वर्णन है, निम्न है :

[3] **The Rational Numbers (Booklet 6)**, National Council of Teachers of Mathematics, Washington D. C. (U.S.A.), 1964.

हिन्दू गणितज्ञों के योगदान के अध्ययन हेतु निम्न पुस्तकें हैं :

[4] C. N. Srinivasiengar : **The History of Ancient Indian Mathematics**, The World University Press Pvt. Ltd., Calcutta (India), 1967.

[5] B. B. Datta and A. N. Singh : **History of Hindu Mathematics**, Vols. I and II, Asia Publishing House, Bombay (India), 1962.

संस्कृति के विकास के साथ-साथ संख्या की संकल्पना के विकास के सुन्दर विवरण के लिए निम्न पुस्तक है :

[6] R. L. Wilder : **Evolution of Mathematical Concepts : An Elementary Study**, John Wiley and Sons Inc., New York (U.S.A.), 1968.

गणित के इतिहास की एक महत्वपूर्ण पुस्तक निम्न है :

[7] D. E. Smith : **History of Mathematics,** Vols. I and II, Ginn and Company, Boston (U.S.A.), 1923 and 1925.

एकक II

सम्मिश्र संख्याएँ

वास्तविक संख्याओं के निकाय का सम्मिश्र संख्याओं में विस्तार किया गया है और सम्मिश्र संख्याओं के बीजगणित का विकास किया गया है।

2.1 भूमिका

एकक I में हमने प्राकृत संख्याओं का वास्तविक संख्याओं में विस्तार किया था। वैकल्पिक रूप से सभी समीकरणों को हल करने की आकांक्षा का प्रयोग विभिन्न संख्या निकायों के विकास के अभिप्रेरण के लिए भी किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, समीकरण $x+2=2$ या व्यापक रूप से समीकरण $x+b=b$ का हल प्राकृत संख्याओं के समुच्चय में प्राप्त करने पर विचार कीजिए। स्पष्ट रूप से, ऐसी कोई प्राकृत संख्या x नहीं है जिसे 2 में जोड़ने से हमें संख्या 2 प्राप्त हो। अतः हमें प्राकृत संख्या-निकाय का पूर्ण संख्याओं (whole numbers) में विस्तार करने की आवश्यकता है।

अब समीकरण $x+11=7$ अथवा व्यापक रूप से समीकरण $x+c=d$ $(c>d)$ के पूर्ण संख्याओं में हल करने के बारे में आप क्या सोचते हैं ? पुनः पूर्ण संख्याओं में इस का हल प्राप्त नहीं हो सकता। अतः हमें पूर्ण संख्याओं के निकाय का पूर्णांकों में विस्तार करने की आवश्यकता है।

अब, उदाहरणार्थ, $5x=3$ जैसे समीकरणों के हल की आकांक्षा से संख्या-निकाय को परिमेय संख्याओं में विस्तार करने की अभिप्रेरणा प्राप्त होती है।

पुनः यदि हम वास्तविक संख्याओं को भी सम्मिलित कर लें तो एक द्विघात समीकरण, उदाहरणार्थ, $x^2=3$ का हल भी सम्भव है।

अन्त में, आपको याद होगा कि वास्तविक संख्याएँ भी कुछ द्विघात समीकरणों, उदाहरणार्थ, $x^2=-4$ अर्थात् ऐसे द्विघात समीकरण जिनमें विविक्तकर (discriminant) ऋणात्मक है, के हल प्राप्त करने में अपर्याप्त हैं।

यद्यपि यूनान के लोगों ने यह जान लिया था कि वास्तविक संख्याओं में ऋणात्मक संख्याओं का वर्गमूल नहीं होता, तथापि जैन गणितज्ञ महावीर ने सर्वप्रथम स्पष्ट रूप से यह कठिनता व्यक्त की थी। 850 ई० में

लिखी गई अपनी कृति गणित सार संग्रह में उन्होंने कहा है कि "जैसा कि स्वाभाविक है कि कोई ऋणात्मक राशि एक वर्ग नहीं होती अतः ऐसी राशि का वर्गमूल भी नहीं हो सकता"। एक अन्य हिन्दू गणितज्ञ भास्कर ने भी 1150 ई० में रचित अपनी कृति बीजगणित में लिखा है कि "किसी ऋणात्मक राशि का वर्गमूल नहीं होता क्योंकि यह एक वर्ग नहीं होती"।

इस प्रकार हमें वास्तविक संख्याओं के निकाय का एक ऐसे निकाय में विस्तार करने की आवश्यकता है जिसमें ऋणात्मक संख्याओं के भी वर्गमूल सम्मिलित हों तथा जिसमें सभी सामान्य संक्रियाएँ तथा उनके गुणधर्म सत्य हों।

2.2 वास्तविक संख्याओं से सम्मिश्र संख्याओं की ओर

हमने देखा है कि ऋणात्मक संख्याओं के वास्तविक वर्गमूल नहीं होते। अतः हम वास्तविक संख्याओं के निकाय का एक ऐसे निकाय में विस्तार करना चाहते हैं जिसमें हम ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूलों को भी ज्ञात कर सकें।

विशिष्ट रूप से संख्या -1 का कोई वर्गमूल नहीं है। हम $\sqrt{-1}$ को एक नई संख्या के संकेत के रूप में सम्मिलित करते हैं जिसे हम i से भी व्यक्त करेंगे।

अब एक ऐसे संख्या-निकाय पर विचार कीजिए जिसमें वास्तविक संख्याएँ तथा संख्या i सम्मिलित हों। आइए, इस निकाय में संख्या i का स्वयं से गुणन निम्न रूप से परिभाषित करें :

$$\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1} = -1$$

या, $\quad i \cdot i = -1$

या, $\quad i^2 = -1$

अब, संख्या -1 का वर्गमूल i है। (हम $\sqrt{-1}$ को -1 का वर्गमूल पढ़ते हैं।) संख्या $\sqrt{-1}$ के लिए यह संकेत i सर्वप्रथम स्विट्ज़रलैंड के गणितज्ञ लियोनार्ड ऑयलर (1707-1783) ने 1748 ई० में दिया था।

अन्त में, हम इस नये निकाय का विस्तार इस प्रकार करते हैं कि इसमें अन्य दो प्रकार की संख्याएँ सम्मिलित हों अर्थात् एक yi जो संख्याओं y तथा i का गुणनफल है तथा दूसरी $(x+yi)$ जो दो संख्याओं x तथा yi का योग है, जहाँ x तथा y वास्तविक संख्याएँ हैं। इस संख्या-निकाय को हम C से व्यक्त करते हैं। दूसरे शब्दों में, C में सभी संख्याएँ $(x+yi)$ सम्मिलित हैं, जहाँ x तथा y वास्तविक संख्याएँ हैं। संख्या $(x+yi)$ सम्मिश्र संख्या (complex number) कहलाती है। संख्याएँ $3+5i$, $\sqrt{2}-7i$ तथा $-\frac{1}{2}+i$ सभी सम्मिश्र संख्याओं के उदाहरण हैं। हम संख्या $(x+i0)$ को वास्तविक संख्या x तथा संख्या $(0+yi)$ को संख्या yi ही समझते हैं। संख्या x सम्मिश्र संख्या $(x+yi)$ का वास्तविक भाग (real part) तथा संख्या y काल्पनिक भाग (imaginary part) कहलाता है। उदाहरणार्थ, संख्या 3 सम्मिश्र संख्या $3+5i$ का वास्तविक भाग है तथा संख्या 5 काल्पनिक भाग है। इसी प्रकार संख्या $-\frac{1}{2}$ सम्मिश्र संख्या $-\frac{1}{2}+i$ का वास्तविक भाग है तथा संख्या 1 काल्पनिक भाग है, इत्यादि। पुनः यदि $y \neq 0$ हो, तो

संख्या $(x+yi)$ एक **अवास्तविक सम्मिश्र संख्या (non-real complex number)** कहलाती है* । संख्याएँ $1-2i$, $4i$ तथा $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$ अवास्तविक सम्मिश्र संख्याओं के उदाहरण हैं । यदि $x=0$ तथा $y\neq0$ हो तो संख्या $(x+yi)$ **विशुद्ध काल्पनिक संख्या (pure imaginary number)** कहलाती है । संख्याएँ $4i$, $0-5i$ तथा $\frac{3}{7}i$, इत्यादि विशुद्ध काल्पनिक संख्याओं के उदाहरण हैं । हम देखते हैं कि अवास्तविक सम्मिश्र संख्याओं में विशुद्ध काल्पनिक संख्याएँ भी सम्मिलित हैं । पुनः **सम्मिश्र संख्याओं के निकाय में वास्तविक संख्याओं का निकाय भी सम्मिलित है ।**

1637 ई० में अपनी सुप्रसिद्ध कृति **"ला ज्योमैटरि " (ज्यामिती)** में "real (वास्तविक)" तथा "imaginary (काल्पनिक)" नाम देने का श्रेय फ्रांसीसी गणितज्ञ **रेने-दकार्त (1596-1650)** को है । 17 वीं तथा 18वीं शताब्दी के अधिकतर गणितज्ञ संख्या $a+b\sqrt{-1}$ को एक काल्पनिक राशि कहते रहे । प्रतिभाशाली जर्मन गणितज्ञ **कार्ल फ्रेडरिक गौस (1777-1855)** ने 1832 ई० में संख्याओं $b\sqrt{-1}$ तथा $a+b\sqrt{-1}$ को भिन्न नाम दिए । उन्होंने संख्या $a+b\sqrt{-1}$ को "complex number **(सम्मिश्र संख्या)**" कहा तथा यही नाम तब से प्रयुक्त होता आया है ।

17 वीं शताब्दी के गणितज्ञ संख्याओं, उदाहरणार्थ, i, $-3i$, $2+5i$, इत्यादि को कोई व्यावहारिक अर्थ नहीं दे सके । इन संख्याओं से वे अशान्त हुए तथा इन्हें "अविश्वसनीय" समझा गया । सम्भवत: इन्हीं कारणों से इन संख्याओं को काल्पनिक कहा गया और दुर्भाग्यवश यही मिथ्या नाम आज तक चलता आया है ।

हम कहते हैं कि **दो सम्मिश्र संख्याएँ तभी तथा केवल तभी समान होती हैं यदि उनके वास्तविक भाग तथा काल्पनिक भाग परस्पर समान हों ।** दूसरे शब्दों में , **यदि a+bi तथा c+di सम्मिश्र संख्याएँ हैं तो a+bi=c+di तभी तथा केवल तभी होगा जबकि a=c तथा b=d हो ।**

आइए कुछ उदाहरण लें ।

उदाहरण 1: यदि $a+bi=2-3i$ तो

$a=2$ तथा $b=-3$ होगा ।

उदाहरण 2: यदि संख्याएँ $2x+3yi$ तथा $2+9i$ एक ही सम्मिश्र संख्या निरूपित करती हों तो x तथा y ज्ञात कीजिए ।

हल: हम x तथा y ज्ञात करना चाहते हैं ताकि

$2x+3yi=2+9i$ हो ।

दो सम्मिश्र संख्याओं की समता की परिभाषा से हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$2x=2$, अत: $x=1$

तथा $3y=9$, अत: $y=3$

---

* यद्यपि कुछ लेखक ऐसी संख्या को काल्पनिक संख्या कहते हैं परन्तु हम इसी शब्द के प्रयोग को प्राथमिकता देंगे ।

प्रश्नावली 2.1

निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के वास्तविक तथा काल्पनिक भाग लिखिए :

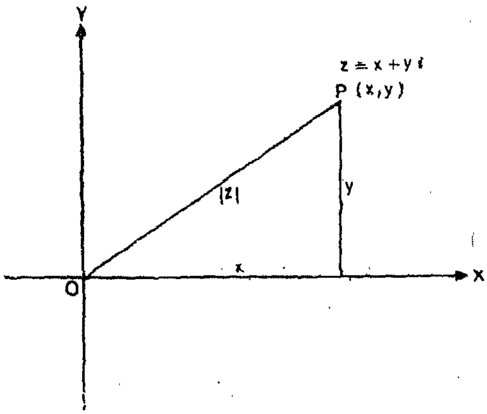
1. $7 + 3i$
2. $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{7} i$
3. $(-5)i + 3$
4. $0 + 7i$
5. $\sqrt{5} + 0i$
6. $2 + \sqrt{2}\, i$

x तथा y का मान ज्ञात कीजिए, यदि

7. $3x + (2x - y)i = 6 - 3i$
8. $(3y - 2) + (5 - 4x)i = 0$
9. $3x + 5yi = 5i$
10. $\left(\frac{3}{\sqrt{2}} x - 2\right) + 5\sqrt{2}\, yi = \sqrt{2}$
11. $\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} y\right) + \frac{2}{3}yi = -2 + 4i$

2.3 सम्मिश्र संख्याओं का ज्यामितीय निरूपण (Geometrical Representation of Complex Numbers)

किसी सम्मिश्र संख्या $x + yi$ का ज्यामितीय निरूपण करने के लिए हम XOY तल (plane) में एक समकोणीय अक्ष पद्धति (rectangular system of axes) OX तथा OY लेते हैं। तल का कोई बिन्दु अद्वितीय रूप से (uniquely) निर्धारित किया जा सकता है यदि हमें उस बिन्दु का x-निर्देशांक (x-coordinate) अर्थात् भुज (abscissa), उदाहरणार्थ, x तथा y-निर्देशांक (y-coordinate) अर्थात् कोटि (ordinate), उदाहरणार्थ, y ज्ञात हो। दूसरे शब्दों में, यदि हमें वास्तविक संख्याओं का क्रमित-युग्म (ordered pair) (x, y) ज्ञात है तो बिन्दु अद्वितीय रूप से निर्धारित किया जा सकता है। विलोमत: तल के प्रत्येक बिन्दु P के तदनुरूपी वास्तविक संख्याओं का एक अद्वितीय क्रमित युग्म (x, y) प्राप्त किया जा सकता है।



आकृति 2.1

इस प्रकार हम देखते हैं कि वास्तविक संख्याओं के एक क्रमित-युग्म (x, y) द्वारा सम्मिश्र संख्या (x+yi) अद्वितीय रूप से निर्धारित की जा सकती है। अत;

प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $(x + yi)$ तल XOY के एक अद्वितीय बिन्दु P (x, y) से निरूपित की जा सकती है। (देखिए आकृति 2.1) स्पष्ट रूप से, संख्याओं $(x + 0i)$ के तदनुरूपी बिन्दु x-अक्ष पर तथा संख्याओं $(0 + yi)$ के तदनुरूपी बिन्दु y-अक्ष पर होंगे। जब हम सम्मिश्र संख्याओं का निरूपण एक तल में करते हैं तो हम इस तल को कभी-कभी सम्मिश्र तल (complex plane) कहते हैं।

प्रायः एक सम्मिश्र संख्या को z से व्यक्त किया जाता है। इसे हम $z = x + yi$ लिखते हैं। दूरी OP को सम्मिश्र संख्या $(x+yi)$ का मापांक (modulus) कहा जाता है जिसे प्रायः $|z|$ से व्यक्त किया जाता है। स्पष्ट रूप से,

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$$

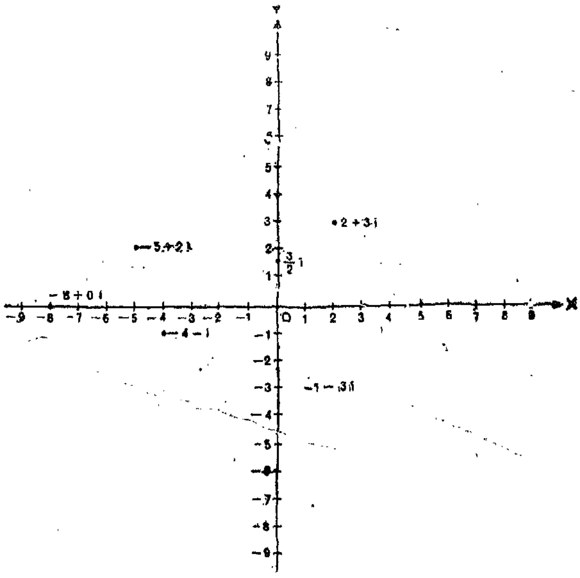
संख्या $\sqrt{x^2+y^2}$ के लिए "माड्यूलस" नाम सन् 1821 में महान फ्रांसीसी गणितज्ञ आगस्टीन-लुइस कोशी (1789-1857) ने दिया था। यह जानना अत्यन्त रुचिकर है कि यद्यपि कोशी ने विद्यालय में इंजीनियरी का अध्ययन किया था तथापि उन्होंने अपना जीवन गणित को ही समर्पित किया। उन्होंने गणित पर प्रचुर मात्रा में लिखा और उसकी विभिन्न शाखाओं में 700 से अधिक निबन्ध प्रकाशित किए।

किसी सम्मिश्र संख्या के तल में ज्यामितीय निरूपण के विषय में कुछ कार्य ब्रिटिश गणितज्ञ जॉन वालिस (1616-1703) ने भी किया। परन्तु वस्तुतः जर्मन गणितज्ञ गौस ने 1831 ई० में सम्मिश्र संख्या $(x + yi)$ को (सम्मिश्र) तल के एक बिन्दु से निरूपित किया। वास्तव में उन्होंने सम्मिश्र संख्याओं के योग तथा गुणन का ज्यामितीय रूप से भी वर्णन किया।

आकृति 2.2 में हम निम्न संख्याओं को आलेखित (plot) करते हैं:

$$2 + 3i, \quad -5 + 2i, \quad -4 - i$$

$$1 - 3i, \quad \frac{3}{2}i, \quad -8 + 0i$$



आकृति 2.2

प्रश्नावली 2.2

निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं को तल में निरूपित कीजिए :

1. $1+2i$
2. $-9+3i$
3. $-3-\frac{1}{2}i$
4. $5-7i$
5. $0-7i$
6. $2i$
7. $\frac{3}{2}+5i$
8. $0+0i$
9. 1
10. i

वे सम्मिश्र संख्याएँ लिखिए जो तल में निम्नलिखित बिन्दुओं से निरूपित होती हैं :

11. $(0,2)$
12. $(1,-2)$
13. $(2,3)$
14. $(3,0)$
15. $(4,-1)$
16. $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$
17. क्या सम्मिश्र तल के कोई दो भिन्न बिन्दु किसी एक ही सम्मिश्र संख्या को निरूपित कर सकते हैं ? सकारण उत्तर दीजिए।

2.4 सम्मिश्र संख्याओं का बीजगणित (Algebra of Complex Numbers)

अब हम सम्मिश्र संख्याओं को जोड़ना, घटाना, गुणन तथा भाग करना सीखेंगे। योग और व्यवकलन के लिए हम सम्मिश्र संख्याओं को में बहुपद (polynomials) मान सकते हैं। आइए, देखें कैसे।

2.4.1 योग

मान लीजिए हम $2+3i$ तथा $5+7i$ को जोड़ना चाहते हैं। यदि हम इन्हें i में बहुपद समझें तो हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(2+3i)+(5+7i) = 7+10i$$

$$\begin{array}{r} 2+3i \\ 5+7i \\ \hline 7+10i \end{array}$$

हम उपर्युक्त को सम्मिश्र संख्याओं का योग परिभाषित करने के लिए अभिप्रेरण के रूप में प्रयोग करते हैं।

यदि $z_1=a+bi$ तथा $z_2=c+di$ सम्मिश्र संख्याएँ हों तो z_1 तथा z_2 के योग को $(a+c)+(b+d)i$ से परिभाषित करते हैं। हम इस योग को z_1+z_2 से व्यक्त करते हैं तथा इसे इस प्रकार लिखते हैं :

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$$

हम देखते हैं कि $x+yi=(x+0i)+(0+yi)$ है। इस प्रकार यह वास्तविक संख्या x तथा काल्पनिक संख्या yi का योग है।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : $(3+4i)$ तथा $(-2+5i)$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल : $(3+4i)+(-2+5i)=(3-2)+(4+5)i$

$$=1+9i$$

उदाहरण 2 : $-2i$ तथा $\frac{3}{2}-4i$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल : हम $-2i$ को $0-2i$ के रूप में लिख सकते हैं।

इस प्रकार, $(0-2i)+\left(\frac{3}{2}-4i\right)=\left(0+\frac{3}{2}\right)+(-2-4)i$

$$=\frac{3}{2}-6i$$

यह सिद्ध करना सरल है कि सम्मिश्र संख्याओं का योग क्रम-विनिमेय होता है। क्योंकि यदि $z_1=a+bi$ तथा $z_2=c+di$ सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो

$$z_1+z_2=(a+c)+(b+d)i$$

तथा

$$z_2+z_1=(c+a)+(d+b)i$$

परन्तु हम जानते हैं कि वास्तविक संख्याओं का योग क्रम-विनिमेय होता है। इस प्रकार, $a+c=c+a$ तथा $b+d=d+b$। इससे सिद्ध होता है कि सम्मिश्र संख्याओं का योग क्रम-विनिमेय होता है।

यह सिद्ध करना कि सम्मिश्र संख्याओं का योग सहचारी होता है, पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ दिया गया है।

अब हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i$, $-\frac{3}{2}i$ तथा $-\frac{5}{2}-i$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल : हम योग के साहचर्य नियम का प्रयोग करते हैं।

इस प्रकार, अभीष्ट योग $=\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}i\right)+\left(0-\frac{3}{2}i\right)\right]+\left(-\frac{5}{2}-i\right)$

$$=\left(\frac{1}{2}+i\right)+\left(-\frac{5}{2}-i\right)=-2+0i=-2$$

स्पष्ट रूप से, $0=0+0i$ योज्य तत्समक है। क्योंकि, यदि $(a+bi)$ एक सम्मिश्र संख्या है तो

$$(a+bi)+(0+0i)=(a+bi)$$

2.4.2 व्यवकलन

मान लीजिए, हम $(3-2i)$ को $(5-7i)$ में से घटाना चाहते हैं। यदि हम इन संख्याओं को i में बहुपद समझें तो आपको याद होगा कि हमें $3-2i$ के चिन्ह बदलकर फिर योग करना चाहिए। अत:

$$(5-7i) - (3-2i) = (5-3) + (-7+2)i$$
$$= 2-5i$$

$5-7i$
$+3-2i$
$-\quad+$
$2-5i$

हम उपर्युक्त को सम्मिश्र संख्याओं का व्यवकलन परिभाषित करने के लिए अभिप्रेरण के रूप में प्रयोग करते हैं।

यदि $z_1 = a+bi$ तथा $z_2 = c+di$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हों तो z_2 को z_1 में से घटाने का तात्पर्य है $z_1 + (-z_2)$ प्राप्त करना, जहाँ $(-z_2)$ इस प्रकार की सम्मिश्र संख्या है कि $z_2 + (-z_2) = 0+0i$।

$(-z_2)$ संख्या z_2 का योज्य प्रतिलोम कहलाता है तथा इसे z_2 के चिह्न बदलकर प्राप्त किया जाता है। हम $z_1 - z_2$ को इस प्रकार लिखते हैं :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a-c) + (b-d)i$$

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : $(-3+4i)$ का योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल : यदि $z_1 = -3+4i$ तो योज्य प्रतिलोम $(-z_1)$, z_1 के चिह्न बदलकर प्राप्त किया जा सकता है।

इस प्रकार, $(-z_1) = 3-4i$

उदाहरण 2 : $(-5-7i)$ को $(3-6i)$ में से घटाइए।

हल : $(3-6i) - (-5-7i) = 8+i$

$3-6i$
$-5-7i$
$+\quad+$
$8+i$

हम देखते हैं कि सम्मिश्र संख्याओं का निकाय योग तथा व्यवकलन की संक्रियाओं के लिए संवृत होता है। इसी अनुच्छेद में कहीं और हम देखेंगे कि यह निकाय गुणन तथा विभाजन की संक्रियाओं के लिए भी संवृत है।

प्रश्नावली 2.3

निम्नलिखित संक्रियाएँ कीजिए तथा परिणाम को $x+yi$ के रूप में लिखिए :

1. $(-3-2i) + (-6+3i)$
2. $\left(\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i\right) - \left(4+\frac{5}{2}i\right)$
3. $(7-2i) - (3+2i) + (7+8i)$
4. $-(-1+\imath) + 4i - 5$
5. $(\sqrt{3}-2i) + \sqrt{3} - (-2-7i)$
6. $(1-i) - (-1-6i)$

7. $(1-2i)-i+(4-7i)-2i+(5i+3)$

8. सिद्ध कीजिए कि सम्मिश्र संख्याओं का योग सहचारी होता है। दूसरे शब्दों में, यदि z_1, z_2 तथा z_3 सम्मिश्र संख्याएँ हैं तो

$$z_1+(z_2+z_3) = (z_1+z_2)+z_3$$

9. एक उदाहरण द्वारा दिखाइए कि सम्मिश्र संख्याओं का व्यवकलन क्रम-विनिमेय नहीं होता।

10. सिद्ध कीजिए कि $|z| = |-z|$

2.4.3 गुणन

मान लीजिए कि हम $z_1=(-3+5i)$ तथा $z_2=(3-6i)$ का गुणन करना चाहते हैं। पुनः, यदि हम इन्हें i में इस गुणधर्म के साथ बहुपद मानें कि हम गुणनफल में i^2 को -1 से प्रतिस्थापित कर सकते हैं, तो हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$z_1 \cdot z_2 = -9+33i-30i^2$$

परन्तु, $i^2 = -1$

अतः, $z_1 \cdot z_2 = -9+33i+30$

या, $z_1 \cdot z_2 = 21+33i$

$$\begin{array}{r} -3+5i \\ 3-6i \\ \hline -9+15i \\ +18i-30i^2 \\ \hline -9+33i-30i^2 \\ \hline \end{array}$$

पुनः हम उपर्युक्त को सम्मिश्र संख्याओं का गुणन परिभाषित करने के लिए अभिप्रेरण के रूप में प्रयोग करते हैं।

यदि $z_1 = a+bi$ तथा $z_2 = c+di$ सम्मिश्र संख्याएँ हों, तो z_1 तथा z_2 के गुणनफल को $(ac-bd)+(ad+bc)i$ से परिभाषित करते हैं। इस गुणनफल को $z_1 . z_2$ (अथवा केवल $z_1\, z_2$) से व्यक्त करते हैं तथा इसे निम्न प्रकार से लिखते हैं :

$$z_1\, z_2 = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

$$\begin{array}{r} c+di \\ a+bi \\ \hline ac+adi \\ +bci+bdi^2 \\ \hline (ac-bd)+(ad+bc)i \\ \hline \end{array}$$

हम देखते हैं कि $yi=(y+0i)\ (0+1i)$ है और इस प्रकार यह वास्तविक संख्या y तथा काल्पनिक संख्या i का गुणनफल है।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1: $3+4i$ को $4+5i$ से गुणा कीजिए।

हल : $(3+4i)\ (4+5i) = 12+15i+16i+20i^2$

$$= -8+31i$$

उदाहरण 2: $(2+\sqrt{3}\,i)^2$ को सरल कीजिए।

हल : $(2+\sqrt{3}\,i)^2 = 4+2\ (2)\ (\sqrt{3}\,i)+3i^2$

$$= 4-3+4\sqrt{3}\,i$$

$$= 1+4\sqrt{3}\,i$$

टिप्पणी : यह सरलता से देखा जा सकता है कि

$$i^3 = i^2(i) = -i$$
$$i^4 = (i^2)\ (i^2) = 1$$
$$i^5 = (i^4)\ (i) = i$$
$$i^6 = (i^4)\ (i^2) = -1, \text{ इत्यादि ।}$$

हम देखते हैं कि किसी धनात्मक पूर्णांक k के लिए i^k का मान या तो -1 या $+1$ या i या $-i$ होता है । हम k के किसी बड़े मान के लिए, i^k का मान उसे i^2 (या उसकी घात) तथा i के गुणा के रूप में व्यक्त करके सुगमता से निकाल सकते हैं । उदाहरणार्थ,

$$i^{23} = i^{22}.\,i = (i^2)^{11}\, i = (-1)^{11}\, i = -i$$
$$i^{42} = (i^2)^{21} = -1$$
$$i^{64} = (i^2)^{32} = 1$$
$$i^{97} = (i^2)^{48}\ (i) = i$$

अब हम यह दिखाते हैं कि सम्मिश्र संख्याओं का गुणन क्रमविनिमेय होता है । क्योंकि, यदि $z_1 = a+bi$ तथा $z_2 = c+di$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हों, तो

$$z_1\, z_2 = (a+bi)\ (c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)\, i$$

तथा $z_2\, z_1 = (c+di)\ (a+bi) = (ca-db) + (da+cb)\, i$

परन्तु a, b, c तथा d वास्तविक संख्याएँ हैं,

अतः $ac-bd = ca-db$

तथा $ad+bc = da+cb$

इससे सिद्ध होता है कि सम्मिश्र संख्याओं का गुणन क्रमविनिमेय होता है । इस प्रकार, हम yi को iy भी लिख सकते हैं ।

यह सिद्ध करना कि सम्मिश्र संख्याओं का गुणन सहचारी होता है, पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ दिया है। अब हम एक उदाहरण लेते हैं ।

उदाहरण 3 : $(2+i)^3$ को सरल कीजिए ।

हल :
$$\begin{aligned}(2+i)^3 &= 2^3 + 3(2)^2\, i + 3(2)i^2 + i^3 \\ &= 8 + 12\, i + 6\, i^2 + i^2 \cdot i \\ &= 8 + 12\, i - 6 - 1\ (i) \\ &= 2 + 11\, i\end{aligned}$$

स्पष्ट रूप से, $1+0i$ (अर्थात् 1) गुणनात्मक तत्समक है, क्योंकि यदि $a+bi$ एक सम्मिश्र संख्या है, तो

$$(a+bi)\,(1+0i) = a+bi$$

यह सिद्ध करना भी पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ दिया गया है कि सम्मिश्र संख्याओं का गुणन योग पर वितरणात्मक (distributive) है । दूसरे शब्दों में, यदि z_1, z_2 तथा z_3 सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो

$$z_1\,(z_2+z_3) = z_1\, z_2 + z_1\, z_3$$

2.4.4 ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के वर्गमूल (Square Roots of Negative Reals)

आपको याद होगा कि हमने अनुच्छेद 2.2 में संख्या i की स्वयं से गुणा की परिभाषा $i^2 = -1$ के रूप में की थी और हमने कहा था कि -1 का वर्गमूल i होता है।

अब, $(-i)(-i)$ के बारे में आप क्या सोचते हैं ? गुणन की परिभाषा के अनुसार,

$$(-i)(-i) = 0 + i^2 = -1$$

इस प्रकार, $-i$ भी संख्या -1 का वर्गमूल है।

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि संख्या -1 के दो वर्गमूल i तथा $-i$ हैं।

आइए, अब हम एक धनात्मक संख्या P पर विचार करें। हम देखते हैं कि

$$(i\sqrt{P})^2 = i^2 P = -P \quad (1)$$

तथा $$(-i\sqrt{P})^2 = i^2 P = -P \quad (2)$$

इस प्रकार एक ऋणात्मक संख्या $-P$ के दो वर्गमूल, $i\sqrt{P}$ तथा $-i\sqrt{P}$ हैं। यह तथ्य कि केवल यही दो वर्गमूल हैं पाद टिप्पणी* (foot note) में सिद्ध किया गया है।

यदि $P > 0$, तो ऋणात्मक संख्या $-P$ के दो वर्गमूल $i\sqrt{P}$ तथा $-i\sqrt{P}$ होते हैं। कभी-कभी हम इन्हें संयुक्त रूप से $\pm i\sqrt{P}$ लिखते हैं। विशिष्ट रूप से संख्या -1 के दो वर्गमूल, $+i$ तथा $-i$ अथवा (संयुक्त रूप में लिखने पर) $\pm i$ हैं। पुनः आगे हम केवल $i\sqrt{P}$ को ही $(-P)$ का वर्गमूल कहेंगे तथा इसे इस प्रकार पढ़ेंगे : "$\sqrt{-P}$ अर्थात् $i\sqrt{P}$ संख्या $(-P)$ का वर्गमूल है"। दूसरे शब्दों में, जब कभी भी हमारे सामने संकेत $\sqrt{-P}$ आए हमें उसके स्थान पर $i\sqrt{P}$ लिख लेना चाहिए।

---

* मान लीजिए $-P$ का एक वर्गमूल $a+bi$ है। तब परिभाषा से,

$$(a+bi)^2 = -P$$

अर्थात्, $a^2 + 2abi - b^2 = -P$ (1)

(1) से हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\text{तथा} \quad \left.\begin{aligned} a^2 - b^2 &= -P \\ 2ab &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

चूँकि $2ab = 0$ है, अतः या तो $a = 0$ या $b = 0$ या दोनों 0 के बराबर होंगे। यह स्पष्ट है कि a और b दोनों एक साथ शून्य नहीं हो सकते।

यदि $b = 0$ तो $a^2 = -P$ जो कि संभव नहीं है। (क्यों ?)

इस प्रकार, b शून्य नहीं हो सकता।

यदि $a = 0$ तो $-b^2 = -P$

अर्थात् $b = \pm\sqrt{P}$

इस प्रकार, $0 \pm \sqrt{P}\, i$ अर्थात् $\pm\sqrt{P}\, i$, $-P$ के दो वर्गमूल हैं। यह तथ्य कि केवल यही दो वर्गमूल हैं, इससे स्पष्ट है कि (2) का कोई अन्य हल नहीं है।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

$$(\text{क}) -36 \quad (\text{ख}) -\frac{16}{25}$$

हल :

(क) -36 के वर्गमूल $\pm\sqrt{-36} = \pm 6i$ हैं।

(ख) $-\frac{16}{25}$ के वर्गमूल $\pm\sqrt{-\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}i$ हैं।

उदाहरण 2 : $\sqrt{-9}\ \sqrt{-121}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{-9} = i\sqrt{9}$

$\sqrt{-121} = i\sqrt{121}$

इस प्रकार, $\sqrt{-9}\ \sqrt{-121} = i^2\sqrt{9}\ \sqrt{121} = i^2\sqrt{1089} = -33$

टिप्पणी : उपरोक्त गुणा में करणियों (radicals) के अन्दर की संख्याओं का गुणन करना तथा फिर वर्गमूल निकालना गलत होगा। आइए देखें कि ऐसा करने पर क्या होगा। इस प्रकार हम निम्न प्राप्त करेंगे :

$$\sqrt{-9}\ \sqrt{-121} = \sqrt{(-9)(-121)} = \sqrt{1089} = 33$$

जो वस्तुतः सही उत्तर नहीं है। हमने कहाँ गलती की? हमने नियम $\sqrt{a}\ \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ का प्रयोग गलत रूप से किया। यह नियम तभी और केवल तभी सत्य होता है जब a तथा b में से कम से कम एक धनात्मक अथवा शून्य हो।

अतः इस प्रकार की भ्रामक स्थिति से बचने के लिए, हम पुनः इस बात पर बल देते हैं कि **जब कभी भी हमारे सामने चिन्ह $\sqrt{-P}$ आए हमें उसके स्थान पर $i\sqrt{P}$ लिख लेना चाहिए।**

उदाहरण 3 : $\sqrt{-\frac{49}{25}}\ \sqrt{-\frac{1}{9}}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{-\frac{49}{25}}\ \sqrt{-\frac{1}{9}} = i\sqrt{\frac{49}{25}}\ i\sqrt{\frac{1}{9}} = i^2\sqrt{\frac{49}{225}} = -\frac{7}{15}$

प्रश्नावली 2.4

निम्नलिखित संख्याओं को $x + yi$ के रूप में लिखिए :

1. i^{20}
2. $8i^{8} + 6i^{16} - 12i^{19}$
3. $i^{14} + (2 - 6i)^{8}$

निम्नलिखित संक्रियाएँ कीजिए तथा परिणाम को $a + bi$ के रूप में लिखिए :

4. $(3 - 7i)\ (3 + 5i)$

5. $(-5 + 3i)\ (8 - 7i)$

6. $(\sqrt{2} - \sqrt{3}\,i)^2$

7. $-2i\ (5i^3)$

8. $(-2 + 3i)\ (3 - 5i)$

9. $\left(-4 - \frac{3}{2}i\right)\left(-4 + \frac{3}{2}i\right)$

10. $(2i+5)^2$

11. $\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\right)^2$

12. $(2+7i)^3$

13. $\left(-3 - \frac{1}{2}i\right)^3$

14. $(\sqrt{5} + 7i)\ (\sqrt{5} - 7i)^2$

15. यदि z_1, z_2 तथा z_3 सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$z_1(z_2\, z_3) = (z_1\, z_2)\, z_3$$

अर्थात् सम्मिश्र संख्याओं का गुणन सहचारी होता है।

16. यदि $z_1 = -3i$, $z_2 = 3 + 4i$ तथा $z_3 = 2 - 3i$, तो जाँच कीजिए कि

$$z_1\ (z_2 + z_3) = z_1\, z_2 + z_1\, z_3$$

17. यदि z_1, z_2 तथा z_3 सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$z_1\ (z_2 + z_3) = z_1\, z_2 + z_1\, z_3$$

अर्थात् सम्मिश्र संख्याओं का गुणन योग पर वितरणात्मक होता है।

निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

18. $\frac{-36}{121}$

19. -144

20. -31

21. $\frac{-180}{225}$

मान निकालिए :

22. $2\sqrt{-9}\ \sqrt{-16}$

23. $\sqrt{-4}\ \sqrt{\frac{-25}{36}}$

24. $\sqrt{-49}\ (2 + \sqrt{-9})$

25. $\sqrt{-4}\ (1 - \sqrt{-169})$

26. यदि z एक सम्मिश्र संख्या है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$|z^2| = |z|^2$$

2.4.5 सम्मिश्र संख्या का गुणनात्मक प्रतिलोम (Multiplicative Inverse of a Complex Number)

आपको याद होगा कि किसी वास्तविक संख्या p को किसी अन्य वास्तविक संख्या q (शून्य के अतिरिक्त) से भाग करने का अर्थ है p को $\frac{1}{q}$ से गुणा करना जहाँ $\frac{1}{q}$ संख्या q का व्युत्क्रम अर्थात् गुणनात्मक प्रतिलोम है। हम दो सम्मिश्र संख्याओं के विभाजन के लिए भी इसी प्रकार की परिभाषा देना चाहेंगे। अतः आइए, एक शून्येतर (non-zero) सम्मिश्र संख्या का गुणनात्मक प्रतिलोम प्राप्त करना सीखें।

मान लीजिए, $a + bi$ एक शून्येतर सम्मिश्र संख्या है। सम्मिश्र संख्याओं का गुणनात्मक तत्समक $1 + 0i$ है।

हम एक सम्मिश्र संख्या $x + yi$ इस प्रकार की प्राप्त करना चाहते हैं कि

$$(a + bi)(x + yi) = 1 + 0i \tag{1}$$

समीकरण (1) को संतुष्ट करने वाली सम्मिश्र संख्या $x + yi$ को हम शून्येतर सम्मिश्र संख्या $a + bi$ का गुणनात्मक प्रतिलोम कहते हैं तथा इसे $\frac{1}{a + bi}$ से व्यक्त करते हैं।

अब समीकरण (1) तभी सत्य होगा जबकि

$$\left.\begin{aligned} ax - by &= 1 \\ \text{तथा} \quad bx + ay &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

चूँकि $a + bi \neq 0$ है, अतः यह स्पष्ट है कि $a^2 + b^2 \neq 0$। अतः हम समीकरण (2) को युगपत समीकरण के रूप में हल कर सकते हैं तथा x और y के निम्न (अद्वितीय) मान प्राप्त करते हैं :

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

[पाठक को चाहिए कि वह यह जाँच करे कि x और y के ये मान वस्तुतः (1) को संतुष्ट करते हैं।]

इस प्रकार, $\frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{(-b)}{a^2 + b^2}i$, शून्येतर

सम्मिश्र संख्या $a + bi$ का गुणनात्मक प्रतिलोम है।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : $3 + 2i$ का गुणनात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल : गुणनात्मक प्रतिलोम $\frac{3}{3^2 + 2^2} + \frac{(-2)}{3^2 + 2^2}i$

अर्थात् $\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$ है।

उदाहरण 2 : $9 - 12i$ का गुणनात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल : गुणनात्मक प्रतिलोम $\frac{9}{9^2+12^2}+\frac{-(-12)}{9^2+12^2}i$

अर्थात् $\frac{9}{225}+\frac{12}{225}i$ है।

2.4.6 विभाजन

अब हम दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2, $(z_2 \neq 0)$ के विभाजन को केवल z_1 से z_2 के गुणनात्मक प्रतिलोम के गुणन के रूप में परिभाषित कर सकते हैं। हम इसे इस प्रकार से लिखते हैं :

$$z_1 \div z_2 \quad \text{अर्थात्} \quad \frac{z_1}{z_2}=z_1\left(\frac{1}{z_2}\right)$$

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : $(2+3i)\div(1+2i)$ ज्ञात कीजिए तथा परिणाम को $x+yi$ के रूप में लिखिए।

हल : हम पहले $1+2i$ का गुणनात्मक प्रतिलोम ज्ञात करते हैं।

हम देखते हैं कि

$$\frac{1}{1+2i}=\frac{1}{1^2+2^2}+\frac{(-2)}{1^2+2^2}i=\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i$$

इस प्रकार, $(2+3i)\div(1+2i)=(2+3i)\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)$

$$=\frac{2}{5}-\frac{4}{5}i+\frac{3}{5}i-\frac{6}{5}i^2$$

$$=\frac{8}{5}+\left(-\frac{1}{5}\right)i$$

उदाहरण 2 : $\frac{5+2i}{-1+\sqrt{3}i}$ को $a+bi$ के रूप में लिखिए।

हल : $\frac{5+2i}{-1+\sqrt{3}i}=(5+2i)\left(\frac{1}{-1+\sqrt{3}i}\right)$

$$=(5+2i)\left(\frac{-1}{1+(\sqrt{3})^2}+\frac{-\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2}i\right)$$

$$=(5+2i)\left(-\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}i\right)$$

$$=-\frac{5}{4}-\frac{5\sqrt{3}}{4}i-\frac{2}{4}i-\frac{2\sqrt{3}}{4}i^2$$

इस प्रकार, $\frac{5+2i}{-1+\sqrt{3}i}=\frac{-5+2\sqrt{3}}{4}+\frac{-(5\sqrt{3}+2)}{4}i$

आपको याद होगा कि किसी धनात्मक पूर्णांक k के लिए i^k या तो -1 या $+1$ या i या $-i$ होता है। यह स्पष्ट है कि किसी ऋणात्मक पूर्णांक k के लिए भी i^k या तो -1 या $+1$ या i या $-i$ होता है। उदाहरणार्थ,

$$i^{-23} = \frac{1}{i^{23}} = \frac{1}{(i^2)^{11} i} = \frac{1}{-i} = i$$

$$i^{-48} = \frac{1}{i^{48}} = \frac{1}{(i^2)^{24}} = 1$$

2.4.7 यद्यपि हमने सम्मिश्र संख्याओं के बीजगणित की बात की है तथापि हमने उनके धनात्मक अथवा ऋणात्मक होने के विषय में कुछ नहीं कहा। हमने ऐसा जानबूझकर किया है। यह सिद्ध किया जा सकता है कि सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय में क्रम-सम्बन्ध को परिभाषित करना तथा साथ ही क्रम-सम्बन्धों द्वारा परिचित गुणधर्मों की संतुष्टि (satisfy) कराना असम्भव है। अतः हम एक सम्मिश्र संख्या के किसी अन्य सम्मिश्र संख्या से बड़ी अथवा छोटी होने के विषय में कुछ नहीं कहते।

2.5 सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी (Conjugate of a Complex Number)

सम्मिश्र संख्याएँ $a+bi$ तथा $a-bi$ एक दूसरे के संयुग्मी (conjugates) कहलाते हैं। इस प्रकार $8+3i$ संख्या $8-3i$ का संयुग्मी है, $2i$ संख्या $-2i$ का संयुग्मी है, $-2i$ संख्या $2i$ का संयुग्मी है, $-3+\frac{2}{5}i$ संख्या $-3-\frac{2}{5}i$ का संयुग्मी है, इत्यादि। किसी सम्मिश्र संख्या z के संयुग्मी को $\bar{z}$ से व्यक्त किया जाता है।

हम देखते हैं कि किसी वास्तविक संख्या का संयुग्मी वह संख्या स्वयं ही होती है।

पुनः, किसी सम्मिश्र संख्या के संयुग्मी का संयुग्मी स्वयं वही सम्मिश्र संख्या होती है। अर्थात् $\overline{(\bar{z})} = z$।

क्योंकि यदि $z = a+bi$, तो $\bar{z} = a-bi$

अतः, $\overline{(\bar{z})} = a+bi$।

अब हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : यदि $z = a+bi$, तो सिद्ध कीजिए कि $z\bar{z} = |z|^2$।

हल : क्योंकि $z = a+bi$, अतः $\bar{z} = a-bi$

इस प्रकार, $z\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2 = |z|^2$

आपको याद होगा कि सम्मिश्र संख्या $z = a+bi$ का गुणनात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{z}$ निम्न है :

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{(-b)i}{a^2+b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

इस प्रकार, किसी शून्येतर सम्मिश्र संख्या z का गुणनात्मक प्रतिलोम ज्ञात करने के लिए हम $\bar{z}$ ज्ञात करते हैं और इसे $|z|^2$ या $z\bar{z}$ से विभाजित करते हैं।

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 2 : $3+2i$ का गुणनात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए। [अनुच्छेद 2.4.5 का उदाहरण 1 भी देखें।]

हल : मान लीजिए $z=3+2i$, तब $\overline{z} = 3-2i$

साथ ही, $|z|^2 = 9+4 = 13$

इस प्रकार, $3+2i$ का गुणनात्मक प्रतिलोम

$\frac{3-2i}{13}$ अर्थात् $\frac{3}{13}-\frac{2}{13}i$ है।

उदाहरण 3 : $9-12i$ का गुणनात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए। [अनुच्छेद 2.4.5 का उदाहरण 2 भी देखें।]

हल : चूँकि $z= 9-12i$, अतः $\overline{z} = 9+12i$

साथ ही, $|z|^2 = 9^2+12^2=225$

इस प्रकार, $9-12i$ का गुणनात्मक प्रतिलोम

$\frac{9+12i}{225}$ अर्थात् $\frac{9}{225}+\frac{12}{225}i$ है।

अब हम संयुग्मियों के कुछ रुचिपूर्ण गुणधर्मों को सिद्ध करते हैं।

I. **दो सम्मिश्र संख्याओं के योग का संयुग्मी उनके संयुग्मियों का योग होता है। दूसरे शब्दों में, यदि z_1 तथा z_2 सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो**

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

मान लीजिए, $z_1= a+bi$ तथा $z_2= c+di$

तब, $z_1+z_2 = (a+c) + (b+d)i$

अब, $\overline{z_1}= a-bi,\ \overline{z_2} = c-di$

तथा $\overline{z_1+z_2} = (a+c) -(b+d)i$

साथ ही, $\overline{z_1} + \overline{z_2} = (a-bi) + (c-di) = (a+c)-(b+d)i$

इस प्रकार, $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

II. **दो सम्मिश्र संख्याओं के गुणनफल का संयुग्मी उनके संयुग्मियों का गुणनफल होता है। दूसरे शब्दों में, यदि z_1 तथा z_2 सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो**

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

III. **दो सम्मिश्र संख्याओं के भागफल (शून्येतर हर) का संयुग्मी उनके संयुग्मियों का भागफल होता है। दूसरे शब्दों में, यदि z_1 तथा z_2 सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो**

$$\overline{\left[\frac{z_1}{z_2}\right]} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

गुणधर्म II तथा III को सिद्ध करना पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ दिया गया है।

उदाहरण 4: सम्मिश्र संख्याओं $(3+4i)$ तथा $(5-12i)$ के योग, अन्तर, गुणनफल, संयुग्मियों, गुणनात्मक प्रतिलोमों तथा भागफल को ज्ञात कीजिए।

हल : योग $= (3+4i) + (5-12i) = 8-8i$

अन्तर $= (3+4i) - (5-12i) = (3-5) + (4+12)i$

$= -2+16i$

गुणनफल $= (3+4i)(5-12i) = (15+48) + (-36+20)i$

$= 63-16i$

$(3+4i)$ का संयुग्मी $(3-4i)$ है जबकि $(5-12i)$ का संयुग्मी $(5+12i)$ है।

$(3+4i)$ का गुणनात्मक प्रतिलोम

$$\frac{3}{3^2+4^2} + \frac{(-4)}{3^2+4^2}i \quad \text{अर्थात्} \quad \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i \text{ है।}$$

$(5-12i)$ का गुणनात्मक प्रतिलोम निम्न है :

$$\frac{1}{5-12i} = \frac{5+12i}{(5-12i)(5+12i)} = \frac{5+12i}{25-144i^2}$$

$$= \frac{5}{169} + \frac{12}{169}i$$

$$\text{भागफल} = \frac{3+4i}{5-12i} = \frac{(3+4i)(5+12i)}{(5-12i)(5+12i)}$$

$$= \frac{(15+48i^2) + (36+20)i}{25-144i^2}$$

$$= \frac{-33}{169} + \frac{56}{169}i$$

प्रश्नावली 2.5

निम्नलिखित संख्याओं के संयुग्मी ज्ञात कीजिए :

1. $3-7i$
2. $-\sqrt{5}+3i$
3. $i\sqrt{-9}+7i$
4. $(6+5i)^2$
5. $6i-3$

निम्नलिखित में प्रत्येक संख्या का गुणनात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए :

6. $3-4i$

7. $\sqrt{3}+7i$

8. $6-\sqrt{3}i$

9. $-i$

10. $4-\sqrt{-9}$

निम्न संक्रियाएँ कीजिए तथा परिणाम को $a+bi$ के रूप में लिखिए :

11. $\dfrac{2-3i}{5-4i}$

12. $\dfrac{2+3i}{-5-4i}$

13. $\dfrac{3+i}{2-i}$

14. $\dfrac{3+2i}{4-3i}$

15. $\dfrac{-3}{2-3i}$

16. $\dfrac{2-\sqrt{-25}}{1-\sqrt{-16}}$

17. $\dfrac{-2}{4i}$

18. $\dfrac{12}{i^3}$

19. $\dfrac{3i-5}{-2-i}$

20. यदि z_1 तथा z_2 सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $\overline{z_1 \cdot z_2}=\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(ii) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

21. सिद्ध कीजिए कि

(i) $z=\overline{z}$ तभी तथा केवल तभी होगा जब z एक वास्तविक संख्या हो।

(ii) $z=-\overline{z}$ तभी तथा केवल तभी होगा जब z एक विशुद्ध काल्पनिक संख्या हो।

22. सिद्ध कीजिए कि किसी सम्मिश्र संख्या तथा उसके संयुग्मी का योग एक वास्तविक संख्या होती है।

23. सिद्ध कीजिए कि किसी सम्मिश्र संख्या तथा उसके संयुग्मी का गुणनफल एक वास्तविक संख्या होती है।

2.6 मुख्य संकल्पनाएँ

सम्मिश्र संख्या	ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के वर्गमूल
सम्मिश्र संख्या का मापांक	व्युत्क्रम अथवा गुणनात्मक प्रतिलोम
सम्मिश्र तल	सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी
सम्मिश्र संख्याओं का	
योग	
अन्तर	
गुणन	
विभाजन	

2.7 अग्रिम अध्ययन हेतु सुझाव

सम्मिश्र संख्याओं के उत्तम वर्णन के लिए निम्न पुस्तक देखें :

[1] W. Ledermann: **Complex Numbers,** Routledge and Kegan Paul Ltd., London (U.K.), 1962.

सम्मिश्र संख्याओं का वास्तविक संख्याओं के क्रमित-युग्मों के रूप में सुन्दर वर्णन निम्न पुस्तक में उपलब्ध है :

[2] R. Spreckelmeyer: **The Complex Numbers,** D. C. Heath & Co., Boston (U.S.A.), 1965.

अनुच्छेद 1.12 में दी गई पुस्तकों [4], [5] तथा [7] के अतिरिक्त सम्मिश्र संख्याओं के इतिहास के उत्तम वर्णन के लिए पाठक निम्न पुस्तक देखें :

[3] M. Kline: **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,** Oxford University Press, New York (U.S.A.), 1972.

एकक III

द्विघात समीकरण और असमीकरण

द्विघात समीकरणों, जिनके गुणांक (coefficients) वास्तविक हैं तथा विविक्तकर ऋणात्मक हैं, के हल प्राप्त किए गए हैं। मूलों (roots) तथा गुणांकों के सम्बन्धों का उल्लेख किया गया है। द्विघात समीकरणों, जिनके गुणांक सम्मिश्र हैं, का अध्ययन किया गया है। अन्त में द्विघात असमीकरणों के हलों तथा उनके आलेखीय निरूपण के विषय में बताया गया है।

3.1 भूमिका

अब जबकि हम ऋणात्मक वास्तविक संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करना सीख गए हैं तो हमारे लिए द्विघात समीकरणों, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, जहाँ a, b तथा c वास्तविक संख्याएँ हैं और विविक्तकर D अर्थात् $b^2 - 4ac$ ऋणात्मक है, के हल ज्ञात करना सम्भव होना चाहिए। परन्तु ऐसा करने से पहले आइए द्विघात समीकरणों के हल सम्बन्धी कुछ महत्वपूर्ण तथ्यों का जिनका अध्ययन हमने पिछली कक्षाओं में किया था, पुनरावलोकन करें।

3.2 पुनरावलोकन*

द्विघात समीकरण : $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in R$,

जहाँ R वास्तविक संख्याओं के सम्मुचय को व्यक्त करता है।

विविक्तकर : $D = b^2 - 4ac$

द्विघात सूत्र (Quadratic Formula) : $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

---

*यदि पाठक द्विघात समीकरणों पर पिछली कक्षाओं में किए गए कार्य से परिचित है तो वह अविच्छिन्नता को खोए बिना सीधे ही अनुच्छेद 3.3 पर जा सकता है।

इस सूत्र का प्रयोग तभी किया जाता है जब कि $D \geqslant 0$ हो।

मूलों का योग : $-\dfrac{b}{a}$

मूलों का गुणनफल : $\dfrac{c}{a}$

प्रश्नावली 3.1
(पुनरावलोकन हेतु)

निम्नलिखित समीकरणों को x, y अथवा z के लिए हल कीजिए :

1. $3x^2+10x+7=0$
2. $2x^2-9x+10=0$
3. $\sqrt{3}\,y^2+10y-8\sqrt{3}=0$
4. $2z^2-10=z$
5. $8x-4x^2=1$
6. $2y^2+0.3y=0.35$
7. $16x^2+1=8x$
8. $10ax^2-6x+15ax=9$, $(a\neq 0)$
9. $\dfrac{4}{y}-3=\dfrac{5}{2y+3}$
10. $\dfrac{1}{3-2x}+\dfrac{1}{5+2x}=\dfrac{1}{2}$
11. $3^x+3^{-x}-2=0$
12. $y^4-13y^2+36=0$
13. $x^{-2}-12=-x^{-1}$
14. $\left(\dfrac{2x+3}{x+1}\right)+6\left(\dfrac{x+1}{2x+3}\right)=7$
15. $\sqrt{3y}-2y+3=0$
16. $3x^2+x+6=0$
17. $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}+\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}=\dfrac{13}{6}$
18. $4y^2=8y+39$
19. $\sqrt{3y+1}+1=\sqrt{y}$
20. $\dfrac{3}{7}x^2+\dfrac{1}{3}x+6=1$
21. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{3x+2}=\sqrt{5x+3}$
22. एक आयताकार खेत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 10 मीटर अधिक है। यदि खेत का क्षेत्रफल 144 वर्ग मीटर है तो उसकी लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
23. एक संख्या तथा उसके व्युत्क्रम (reciprocal) का योग $\dfrac{41}{20}$ है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।
24. दो संख्याएँ इस प्रकार की हैं कि उनका योग 54 तथा गुणनफल 629 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

25. जंगल के अन्दर कुल संख्या के $\frac{1}{8}$ के वर्ग के बराबर बानर (apes) उत्साह के साथ खेल रहे हैं। शेष 12 बानर पहाड़ी पर हैं। चारों ओर की पहाड़ियों से अपनी किलकारियों की प्रतिध्वनि से उन्हें खीज उत्पन्न होती है। बानरों की कुल संख्या कितनी है?
[स्रोत : भास्कर की कृति लीलावती]

26. ऊँटों के झुंड का एक-चौथाई जंगल में देखा गया। झुंड के वर्गमूल का दुगुना पहाड़ों की ढलानों पर गया हुआ था। पाँच ऊँटों के तिगुने ऊँट नदी के किनारे पर थे। उन ऊँटों की संख्या कितनी थी?
[स्रोत : महावीर की कृति गणित सार संग्रह]

निम्नलिखित में से प्रत्येक द्विघात समीकरण के मूल निर्धारित किए बिना उनके योग तथा गुणनफल ज्ञात कीजिए :

27. $4x^2=4x+37$

28. $4\sqrt{3}x^2+9x=3\sqrt{3}$

29. $7y^2-16y+4=0$

30. $\frac{3}{5}z^2-\frac{13}{5}-2z=0$

31. $\frac{1}{3}y^2+\frac{1}{4}y=0$

32. $\sqrt{3}x^2-\frac{11}{2}x+\frac{3\sqrt{3}}{4}=0$

द्विघात समीकरण बनाइए जिनके मूल निम्नलिखित हैं :

33. $-3, -4$

34. $-2, \frac{1}{2}$

35. $3-\sqrt{3}, 3+\sqrt{3}$

36. $7, -7$

37. $\frac{3}{4}, -2$

38. $4\sqrt{5}, -4\sqrt{5}$

39. $-\frac{3}{7}, -\frac{2}{3}$

40. $2+3\sqrt{2}, 2-3\sqrt{2}$

3.3 वास्तविक गुणांकों वाले द्विघात समीकरणों के मूल—द्विघात सूत्र (Roots of Quadratic Equations with Real Coefficients—The Quadratic Formula)

मान लीजिए, $ax^2+bx+c=0, a\neq 0, a, b, c \in R$ एक द्विघात समीकरण है। हम इस समीकरण के मूल अथवा हल प्राप्त करना चाहते हैं, विशिष्ट रूप से उस स्थिति में जबकि $D=b^2-4ac<0$। हम किस प्रकार आगे बढ़ें?

पहले की तरह, हम दिए हुए समीकरण को इस प्रकार लिखते हैं :

$$ax^2+bx=-c$$

अर्थात्, $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \quad (1)$$

(1) के दोनों पक्षों में हम $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$ जोड़ते हैं (क्यों?) तथा निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

अर्थात्, $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad (2)$$

यदि $b^2-4ac \geqslant 0$ तो हम इस स्थिति में (2) के दोनों पक्षों का वर्गमूल ज्ञात करके निम्न द्विघात सूत्र प्राप्त करते हैं :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad (3)$$

तथा इस स्थिति में मूल निम्नलिखित हैं :

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=r_1 \text{ (मान लीजिए)}; \quad \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=r_2 \text{ (मान लीजिए)}$$

यदि $b^2-4ac<0$, तो आपको याद होगा कि इसके दो वर्गमूल $\pm i\sqrt{-(b^2-4ac)}$ हैं। इस प्रकार, $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ के दो वर्गमूल $\frac{\pm i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}$ होंगे।

अत: (2) से,

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}$$

जिससे हमें $b^2-4ac<0$ की स्थिति के लिए निम्न द्विघात सूत्र प्राप्त होता है :

$$x=\frac{-b\pm i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}$$

अत: दोनों मूल निम्नलिखित हैं :

$$\frac{-b+i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}=r_1 \text{ (मान लीजिए)}; \quad \frac{-b-i\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}=r_2 \text{ (मान लीजिए)}।$$

आपको याद होगा कि b^2-4ac द्विघात समीकरण का विविक्तकर (discriminant) कहलाता है तथा इसे प्राय: D से व्यक्त किया जाता है।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1: $x^2+4x+20=0$ के हल ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि

$$b^2-4ac=16-80=-64<0$$

इस प्रकार, $$x=\frac{-4\pm i\sqrt{64}}{2}=\frac{-4\pm 8i}{2}$$

अर्थात्, $x=-2\pm 4i$

अतः दिए हुए समीकरण के हल $-2+4i$ तथा $-2-4i$ हैं।

हम देखते हैं कि दोनों मूल एक दूसरे के संयुग्मी हैं।

उदाहरण 2 : $\frac{3}{7}x^2 - \frac{5}{2}x + 7 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल : पुनः, $b^2 - 4ac = \frac{25}{4} - 12 = -\frac{23}{4} < 0$

इस प्रकार,
$$x = \frac{\frac{5}{2} \pm i\sqrt{\frac{23}{4}}}{\frac{6}{7}} = \frac{\frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2}i}{\frac{6}{7}}$$

अर्थात्,
$$x = \frac{1}{12}(35 \pm 7\sqrt{23}\,i)$$

अतः दिए हुए समीकरण के मूल

$$\frac{1}{12}(35 + 7\sqrt{23}\,i) \text{ तथा } \frac{1}{12}(35 - 7\sqrt{23}\,i) \text{ हैं।}$$

पुनः, हम देखते हैं कि दोनों मूल एक दूसरे के संयुग्मी हैं।

3.4 द्विघात समीकरणों के मूलों की प्रकृति (Nature of the Roots of Quadratic Equations)

हम पहले ही जानते हैं कि किसी द्विघात समीकरण के मूलों को प्राप्त किए बिना ही हम केवल D $(D \geq 0)$ का मान प्राप्त करके उसके मूलों की प्रकृति (nature) के विषय में बता सकते हैं। जब $D < 0$ है तो हम देखते हैं कि मूल अवास्तविक सम्मिश्र हैं तथा साथ ही वे एक दूसरे के संयुग्मी हैं। हम उपरोक्त तथ्यों को संक्षेप में नीचे एक सारणी के रूप में दे रहे हैं :

द्विघात समीकरण : $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0,\ a, b, c \in R$

विविक्तकर : $D = b^2 - 4ac$

D का मान	द्विघात सूत्र	मूलों की प्रकृति
$D > 0$	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	वास्तविक तथा असमान
$D = 0$	$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	वास्तविक तथा समान
$D < 0$	$\frac{-b \pm i\sqrt{-(b^2 - 4ac)}}{2a}$	अवास्तविक सम्मिश्र तथा परस्पर संयुग्मी

आइए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूल निर्धारित किए बिना उनकी प्रकृति बताइए :

(i) $2y^2-2\sqrt{6}\,y+3=0$

(ii) $\sqrt{3}\,y^2-3y+y^2-3=\sqrt{3}$

(iii) $12x^2-10\sqrt{2}\,x+7=0$

हल : (i) $2y^2-2\sqrt{6}\,y+3=0$

$$D=b^2-4ac=(2\sqrt{6})^2-4\,(2)\,(3)=0$$

इस प्रकार, मूल वास्तविक तथा समान हैं।

(ii) $\sqrt{3}\,y^2-3y+y^2-3=\sqrt{3}$

अर्थात्, $(\sqrt{3}+1)\,y^2-3y-3-\sqrt{3}=0$

यहाँ, $a=\sqrt{3}+1,\ b=-3,\ c=-3-\sqrt{3}$ है।

इस प्रकार, $D=b^2-4ac=9-4(\sqrt{3}+1)(-3-\sqrt{3})=9+4\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+1)^2$

अर्थात्, $D>0$

अतः, मूल वास्तविक तथा असमान हैं।

(iii) $12x^2-10\sqrt{2}\,x+7=0$

$$D=(10\sqrt{2})^2-4\,(12)(7)=200-336<0$$

अतः, मूल अवास्तविक सम्मिश्र तथा परस्पर संयुग्मी हैं।

3.5 द्विघात समीकरण के मूलों तथा गुणांकों में सम्बन्ध (Relation between Roots and Coefficients of a Quadratic Equation)

मान लीजिए, हम द्विघात् समीकरण $ax^2+bx+c=0,\ a\neq0,\ a, b, c \in R,$ के दो मूलों को r_1 तथा r_2 से व्यक्त करते हैं। हम पहले देख चुके हैं कि यदि $D=b^2-4ac\geqslant 0$, तो

$$r_1+r_2=-\frac{b}{a}=-\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

तथा $$r_1r_2=\frac{c}{a}=\frac{\text{स्थिरांक पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$$

अब हम $D<0$ की स्थिति में मूलों का योग तथा गुणनफल ज्ञात करते हैं।

जब $D<0$, तो समीकरण के मूल निम्न हैं :

$$\frac{-b+i\sqrt{-D}}{2a}\,(=r_1) \text{ तथा } \frac{-b-i\sqrt{-D}}{2a}\,(=r_2)$$

अब, $$r_1+r_2=\frac{-b+i\sqrt{-D}-b-i\sqrt{-D}}{2a}=-\frac{b}{a}$$

तथा $r_1 r_2 = \frac{(-b+i\sqrt{-D})(-b-i\sqrt{-D})}{4a^2} = \frac{b^2 - i^2(\sqrt{-D})^2}{4a^2}$

$= \frac{b^2+(-D)}{4a^2} = \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} = \frac{c}{a}$

इस प्रकार, $b^2 - 4ac$ के सभी मानों के लिए

मूलों का योग $= r_1 + r_2 = \frac{-b}{a} = -\frac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

मूलों का गुणनफल $= r_1 r_2 = \frac{c}{a} = \frac{\text{स्थिरांक पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}}$

उपरोक्त से हम देखते हैं कि किसी द्विघात समीकरण के मूल निर्धारित किए बिना उनका योग तथा गुणनफल प्राप्त करना सम्भव है।

उदाहरणार्थ, अनुच्छेद 3.3 के उदाहरण 1 में समीकरण $x^2+4x+20=0$ है।

मूलों का योग $= -\frac{4}{1} = -4$

तथा मूलों का गुणनफल $= \frac{20}{1} = 20$

आइए, जाँच कर के देखें कि वस्तुत: ऐसा है या नहीं। इस समीकरण के प्राप्त किए गए मूल $-2+4i$ तथा $-2-4i$ थे।

अत:, योग $= (-2+4i)+(-2-4i) = -4$

गुणनफल $= (-2+4i)\ (-2-4i) = (-2)^2-(4i)^2 = 20$

अब, आइए अनुच्छेद 3.3 का उदाहरण 2 देखें। दिया हुआ समीकरण

$\frac{3}{7}x^2 - \frac{5}{2}x + 7 = 0$ है।

मूलों का योग $= -\frac{\frac{-5}{2}}{\frac{3}{7}} = \frac{35}{6}$

तथा मूलों का गुणनफल $= \frac{7}{\frac{3}{7}} = \frac{49}{3}$

[इस समीकरण के प्राप्त किए गए मूल $\frac{1}{12}(35 \pm 7\sqrt{23}\,i)$ थे।

पाठक जाँच करके देखें कि इन संख्याओं का योग $\frac{35}{6}$ तथा गुणनफल $\frac{49}{3}$ है।]

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं ।

उदाहरण 1 : यदि α, β समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हैं तो निम्न के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\alpha^2+\beta^2$ (ii) $\alpha^3+\beta^3$ (iii) $\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2$ (iv) $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha^{-1}+\beta^{-1}}$

हल : क्योंकि α, β समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हैं,

अतः, $\alpha+\beta = \dfrac{-b}{a}$ तथा $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

(i) अब, $\alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta$

$$= \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right) = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{b^2-2ac}{a^2}$$

(ii) $\alpha^3+\beta^3 = (\alpha+\beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - \frac{3c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)$$

$$= -\frac{b^3}{a^3} + \frac{3bc}{a^2} = \frac{3abc-b^3}{a^3}$$

(iii) $\alpha^4+\beta^4+\alpha^2\beta^2 = (\alpha^2+\beta^2)^2 - \alpha^2\beta^2$

$$= [(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta]^2 - (\alpha\beta)^2$$

$$= \left[\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{2c}{a}\right]^2 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$= \left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)^2 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$= \frac{b^4+3a^2c^2-4ab^2c}{a^4}$$

(iv) $$\frac{\alpha+\beta}{\alpha^{-1}+\beta^{-1}} = \frac{\alpha+\beta}{\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}} = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

उदाहरण 2 : द्विघात समीकरण $x^2+kx+12=0$ के मूल r_1 तथा r_2 ऐसे हैं कि $r_1-r_2=1$ है। k का मान निर्धारित कीजिए ।

हल : $x^2+kx+12=0$

क्योंकि r_1 तथा r_2 इस समीकरण के मूल हैं,

अतः, $r_1+r_2 = -k$

तथा $r_1r_2 = 12$

अब, $(r_1-r_2)^2 = (r_1+r_2)^2 - 4r_1r_2$

अर्थात्, $1 = k^2 - 48$

इस प्रकार, $k^2 - 49 = 0$, अतः $k = \pm 7$

उदाहरण 3 : दिए हुए समीकरण $x^2 + px + q = 0$ में p तथा q का मान निर्धारित कीजिए ताकि समीकरण के मूल p तथा q हों।

हल : मान लीजिए, α तथा β समीकरण $x^2 + px + q = 0$ के मूल हैं।

तब, $\alpha + \beta = -p$ (1)

तथा $\alpha\beta = q$ (2)

यदि p तथा q मूल हैं तो उनका योग $p+q$ तथा गुणनफल pq होगा।

(1) तथा (2) में प्रतिस्थापन करने पर हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\left.\begin{aligned} p+q &= -p \\ \text{तथा} \quad pq &= q \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

यदि $q \neq 0$ तो $p = 1$ तथा $q = -2p$, अतः $q = -2$

यदि $q = 0$, तो $p.0 = 0$ तथा $0 = -2p$, अतः $p = 0$

अतः दी हुई समस्या के दो हल $p = 0, q = 0$ तथा $p = 1, q = -2$ हैं।

प्रश्नावली 3.2

निम्नलिखित समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए :

1. $x^2 - 6x + 13 = 0$
2. $y^2 + 16y + 73 = 0$
3. $9x^2 - 12x + 5 = 0$
4. $x^2 - 2\sqrt{5}x + 14 = 0$
5. $\sqrt{3}x^2 + 11x + 6\sqrt{3} = 0$
6. $\frac{3}{2}x^2 + 4\sqrt{3}x + 4 = 0$
7. $19x^2 - 6\sqrt{2}x + 2 = 0$
8. $2\sqrt{3}y^2 - 7y + 6\sqrt{3} = 0$
9. $(y+1)(y-3) + 7 = 0$
10. $\left(\frac{7x^2+1}{x^2-1}\right) - 4\left(\frac{x^2-1}{7x^2+1}\right) + 3 = 0$

निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूल निर्धारित किए बिना उनकी प्रकृति बताइए :

11. $5x^2-6x+7=0$

12. $4\sqrt{3}x^2-9x+3\sqrt{3}=0$

13. $\frac{3}{4}x^2-\frac{2}{3}x+1=0$

14. $\frac{4}{9}x^2-x+\frac{9}{16}=0$

15. $(x-2a)(x-2b)=4ab$

16. $y^2+y+5=0$

k के किन मानों के लिए निम्नलिखित में से प्रत्येक समीकरण के मूल वास्तविक तथा समान होंगे ?

17. $kx^2-12x+9=0$

18. $9x^2+kx+1=0$

19. $y^2+10y+k=0$

*20. $k\ (k>0)$ का मान निर्धारित कीजिए ताकि दोनों समीकरणों, $x^2+k\,x+64=0$ तथा $x^2-8\,x+k=0$ के मूल वास्तविक हों।

निम्नलिखित में से प्रत्येक समीकरण के मूल निर्धारित किए बिना उसके मूलों के योग तथा गुणनफल लिखिए :

21. $x^2=1$

22. $4\sqrt{3}\,x^2-7\,x+\sqrt{3}=0$

23. $-\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{15}x+9=0$

यदि α तथा β समीकरण $a\,x^2+b\,x+c=0$, $a\neq 0$ के मूल हों, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए :

24. $\alpha^2-\beta^2$

25. $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$

26. $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}$

27. $\alpha^4+\beta^4$

28. $\alpha^6+\beta^6$

29. द्विघात समीकरण $5\,x^2-p\,x+1=0$ के मूल r_1 तथा r_2 ऐसे हैं कि $r_1-r_2=1$ है। p का मान ज्ञात कीजिए।

30. यदि α तथा β समीकरण $x^2-3ax+a^2=0$ के मूल हों तथा $\alpha^2+\beta^2=\frac{7}{4}$ हो तो a का मान निर्धारित कीजिए।

3.6 द्विघात समीकरणों (वास्तविक गुणांक) का बनाना [Forming Quadratic Equations (Real coefficients)]

दिए हुए द्विघात समीकरण के मूल निर्धारित करना हमने सीख लिया है। पिछली कक्षाओं में हमने यह भी देखा था कि यदि मूल दिए हों तो द्विघात समीकरण कैसे बनाई जाती है। यदि α तथा β दिए हुए मूल हों तो हम तुरन्त अभीष्ट समीकरण* निम्न रूप से लिखते हैं :

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

अर्थात्, $x^2-(\alpha+\beta)\,x+\alpha\,\beta=0$

अथवा, x^2-(मूलों का योग) $x+$(मूलों का गुणनफल) $=0$

हमने α तथा β के वास्तविक मानों के लिए ऐसा किया था। अनुच्छेद 3.5 में हमने यह भी देखा है कि जब α तथा β सम्मिश्र तथा अवास्तविक हों तो वे परस्पर संयुग्मी होते हैं। मूलों के योग तथा गुणनफल के सूत्र यहाँ भी लागू होते हैं। इस प्रकार यदि मूल दिए हों तो द्विघात समीकरण लिखने की विधि इस स्थिति में भी सत्य होगी।

हम कैसे जानते हैं कि इस प्रकार प्राप्त किए गए द्विघात समीकरण के गुणांक वास्तविक होंगे ? आपको याद होगा कि यदि α तथा β सम्मिश्र एवं परस्पर संयुग्मी हों तो वस्तुतः उनके योग तथा गुणनफल वास्तविक होते हैं।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : वास्तविक गुणांकों का द्विघात समीकरण प्राप्त कीजिए जिसका एक मूल $1+3\,i$ हो।

हल : दूसरा मूल अवश्य ही $1-3\,i$ होना चाहिए। (क्यों ?)

इस प्रकार, मूलों का योग $=(1+3\,i)+(1-3\,i)=2$

तथा, मूलों का गुणनफल $=(1+3\,i)\,(1-3\,i)=10$

अतः, अभीष्ट समीकरण $x^2-2\,x+10=0$ है।

उदाहरण 2 : द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल

$$\frac{6}{5}\pm\frac{1}{3}i \quad \text{हैं।}$$

हल : मूलों का योग $=\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{3}i\right)+\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{3}i\right)=\frac{12}{5}$

मूलों का गुणनफल $=\left(\frac{6}{5}+\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{6}{5}-\frac{1}{3}i\right)=\frac{349}{225}$

---

*वास्तव में, $k\,(x-\alpha)\,(x-\beta)=0$, जहाँ k एक शून्येतर वास्तविक संख्या है, के मूल भी α और β हैं। परन्तु हम इसे $(x-\alpha)\,(x-\beta)=0$ के समान ही मानेंगे और इसी कारण हम एक ही द्विघात समीकरण की बात करते हैं।

इस प्रकार, अभीष्ट समीकरण $x^2-\frac{12}{5}x+\frac{349}{225}=0$

अर्थात् $225x^2-540x+349=0$ है।

उदाहरण 3: यदि α तथा β समीकरण $3x^2-2x+5=0$ के मूल हों, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\frac{\alpha}{\beta}$ तथा $\frac{\beta}{\alpha}$ हैं।

हल: क्योंकि α तथा β समीकरण $3x^2-2x+5=0$ के मूल हैं,

अतः, $\alpha+\beta=\frac{2}{3}$

तथा $\alpha\beta=\frac{5}{3}$

क्योंकि $\alpha\beta=\frac{5}{3}$ है, अतः स्पष्ट है कि न तो α तथा न ही β शून्य हो सकता है।

अब, $\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=-\frac{26}{15}$

तथा $\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha}=1$

अतः अभीष्ट समीकरण $x^2+\frac{26}{15}x+1=0$

अर्थात् $15x^2+26x+15=0$ है।

उदाहरण 4: यदि α तथा β द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हों, तो सिद्ध कीजिए कि 2α तथा 2β समीकरण $ax^2+2bx+4c=0$ के मूल होंगे।

हल: क्योंकि α तथा β समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हैं,

अतः, $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$

तथा $\alpha\beta=\frac{c}{a}$

अब, $2\alpha+2\beta=2(\alpha+\beta)=-\frac{2b}{a}$

तथा $2\alpha(2\beta)=4\alpha\beta=\frac{4c}{a}$

अतः, अभीष्ट समीकरण $x^2+\frac{2b}{a}x+\frac{4c}{a}=0$

अर्थात् $ax^2+2bx+4c=0$ है।

प्रश्नावली 3.3

वास्तविक गुणांकों के वे द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके मूल निम्न हैं :

1. $\frac{3}{5}, \frac{-4}{3}$

2. $7-3i$

3. $1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}$

4. $-7+8i$

5. $3, 1+\sqrt{2}$

6. $4 \frac{1}{4}$

7. $\frac{m-n}{m+n}, -\frac{m+n}{m-n}$

8. $\pm i(a-b)$

*9. $\frac{1}{10-\sqrt{72}}, \frac{1}{10+6\sqrt{2}}$

10. यदि α तथा β द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल (शून्येतर), हैं तो वे समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके मूल निम्न हैं :

    (i) $\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\beta}{\alpha}$

    (ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$

11. यदि α तथा β द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ के मूल हैं तो सिद्ध कीजिए कि α^3 तथा β^3 समीकरण $a^3x^2+(b^3-3abc)x+c^3=0$ के मूल हैं।

3.7 सम्मिश्र संख्याओं के वर्गमूल (Square Roots of Complex Numbers)

हम देख चुके हैं कि प्रत्येक (शून्येतर) वास्तविक संख्या के दो वर्गमूल होते हैं। आइए, अब देखें कि क्या हम सम्मिश्र संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, सम्मिश्र संख्या $-48-14i$ पर विचार कीजिए।

मान लीजिए $a+bi$ संख्या $-48-14i$ का एक वर्गमूल है।

तब, $(a+bi)^2 = -48-14i$ (1)

(1) के दोनों पक्षों के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को बराबर करने पर हम निम्न प्राप्त करते हैं:

$$a^2-b^2 = -48 \quad (2)$$

तथा, $$2ab = -14 \quad (3)$$

हम यह भी जानते हैं कि (1) के दोनों पक्षों की संख्याओं के मापांक समान होने चाहिए।

अर्थात्, $|(a+bi)^2| = |-48-14i|$

परन्तु, $|(a+bi)^2| = |(a+bi)|^2 = a^2+b^2$ [प्रश्न 18, प्रश्नावली 2.2]

इस प्रकार, $a^2+b^2 = \sqrt{48^2+14^2} = 50$ (4)*

(2) तथा (4) से,

$$a^2 = 1, \text{ अत: } a = \pm 1$$

(3) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$b = \mp 7$$

[पाठक को चाहिए कि वह जाँच करे कि $(1-7i)^2 = -48-14i$ तथा $(-1+7i)^2 = -48-14i$ है।]

इस प्रकार, सम्मिश्र संख्या $-48-14i$ के दो वर्गमूल $1-7i$ तथा $-1+7i$ हैं।

हम उपरोक्त विधि से सिद्ध कर सकते हैं कि **प्रत्येक शून्येतर सम्मिश्र संख्या के ठीक दो वर्गमूल होते हैं। यदि हम इनमें से एक को w (w सम्मिश्र) से व्यक्त करें तो दूसरा $-w$ होगा। [इसकी उपपत्ति पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ दी गई है।]**

अब हम एक अन्य उदाहरण पर विचार करते हैं।

उदाहरण : $2+3i$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $x+yi$ एक वर्गमूल है।

तब, $(x+yi)^2 = 2+3i$ (1)

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को बराबर करने पर,

$x^2-y^2 = 2$ (2)

तथा $2xy = 3$ (3)

पुन: $|(x+yi)^2| = |2+3i|$

अर्थात्, $x^2+y^2 = \sqrt{13}$ (4)

(2) तथा (4) से हम देखते हैं कि

$$2x^2 = 2+\sqrt{13}$$

$$\text{अत: } x = \pm\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}}$$

(3) के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर तथा x^2 का मान प्रतिस्थापित करने पर हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$y^2 = \frac{9}{\frac{4(2+\sqrt{13})}{2}} = \frac{9}{2}\left[\frac{\sqrt{13}-2}{(\sqrt{13}+2)(\sqrt{13}-2)}\right] = \frac{\sqrt{13}-2}{2}$$

$$\text{जिससे } y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}$$

---

* (4) नया समीकरण नहीं है। यह (2) और (3) से भी प्राप्त किया जा सकता है, क्योंकि $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2$

अतः सम्मिश्र संख्या $2+3i$ के दो वर्गमूल

$$\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\,i \text{ तथा } -\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\,i \text{ हैं।}$$

प्रश्नावली 3.4

निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

1. $-4-3i$
2. $5-12i$
3. $-2i$
4. $7+24i$
5. $-21-20i$
6. $-2+2\sqrt{3}\,i$
7. $9-40i$
8. i
9. $-i$

3.8 सम्मिश्र गुणांकों के द्विघात समीकरणों के मूल (Roots of Quadratic Equations with Complex Coefficients)

आइए, अब द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0, a\neq 0, a, b, c \in C$ पर विचार करें। हम इस समीकरण के मूल (अर्थात् हल) प्राप्त करना चाहते हैं।

दिए हुए समीकरण को हम इस प्रकार लिखते हैं :

$$ax^2+bx=-c$$

अर्थात्, $$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \qquad (1)$$

(1) के दोनों पक्षों में हम $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)\right]^2$ जोड़ते हैं (क्यों ?) तथा निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad (2)$$

क्योंकि सम्मिश्र संख्याएँ योग, व्यवकलन, गुणन तथा विभाजन की संक्रियाओं के लिए संवृत होती हैं, अतः $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ एक सम्मिश्र संख्या है। हम पुनः b^2-4ac को विविक्तकर कहते हैं तथा इसे D से व्यक्त करते हैं।

यदि $D=b^2-4ac=0$, तो (2) का दक्षिण पक्ष $0+0i$ है तथा इसका वर्गमूल $0+0i$ है। इस स्थिति में हम पुनरावृत्त मूल (repeated root)

$$x=-\frac{b}{2a} \text{ प्राप्त करते हैं।}$$

यदि $D=b^2-4ac\neq 0$, तो $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ के दो वर्गमूल हैं। (क्यों?) यदि हम b^2-4ac के दो वर्गमूलों को α तथा $-\alpha$ से व्यक्त करें, तो $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ के दो वर्गमूल $\frac{\alpha}{2a}$ तथा $-\frac{\alpha}{2a}$ होंगे।

अतः (2) से,

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\alpha}{2a}$$

अथवा, $x=\frac{-b\pm\alpha}{2a}$

अर्थात्, $x=\frac{-b+\alpha}{2a}\ ,\ \frac{-b-\alpha}{2a}$

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1: $x^2-(5-i)x+(18+i)=0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल: आइए, सबसे पहले $D=b^2-4ac$ ज्ञात करें।

$$D=b^2-4ac=(5-i)^2-4(18+i)$$
$$=-48-14i$$

हम देखते हैं कि $D\neq 0$। हम अनुच्छेद 3.7 में देख चुके हैं कि $-48-14i$ के दो वर्गमूल $1-7i$ तथा $-1+7i$ हैं।

अतः, $x=\frac{-b+(1-7i)}{2a}$ तथा $x=\frac{-b+(-1+7i)}{2a}$

अब, $-b=(5-i)$ तथा $2a=2$

इस प्रकार, $x=3-4i$ तथा $2+3i$ है।

दूसरे शब्दों में, अभीष्ट हल $3-4i$ तथा $2+3i$ हैं।

आइए, जाँच करके देखें।

क्या $(3-4i)^2-(5-i)(3-4i)+(18+i)=0+0i$ है? आइए, देखें।

वाम पक्ष $=9-24i-16-15+23i+4+18+i=0+0i$

अतः, वस्तुतः $3-4i$ एक हल है।

[पाठक के लिए यह अभ्यासार्थ छोड़ दिया गया है कि वह जाँच करे कि $2+3i$ भी एक हल है।]

उदाहरण 2: $x^2-3ix+4=0$ को C पर हल कीजिए।

हल: $D=b^2-4ac=-9-16=-25$

D एक ऋणात्मक वास्तविक संख्या है। इसके दो वर्गमूल $5i$ तथा $-5i$ हैं।

इस प्रकार, $x = \frac{3i+5i}{2}$ तथा $\frac{3i-5i}{2}$ है।

अतः, अभीष्ट हल $4i$ तथा $-i$ हैं।

[यह जाँच करके देखना कि वस्तुतः $4i$ तथा $-i$ दो हल हैं—पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ दिया गया है।

प्रश्नावली 3.5

निम्नलिखित समीकरणों को C पर हल कीजिए :

1. $x^2 - ix + 6 = 0$
2. $ix^2 - 4x - 4i = 0$
3. $x^2 - (7-i)x + (18-i) = 0$
4. $2x^2 - (3+7i)x + (9i-3) = 0$
5. $x^2 - (3\sqrt{2} + 2i)x + 6\sqrt{2}\,i = 0$
6. $y^2 - y + 1 + i = 0$
7. $ix^2 - 3x - 2i = 0$
8. $(3x-i)^2 + 4 = 0$
9. $x^2 = -2i$
10. $x^2 = 7 + 24i$
11. $y^2 = -21 - 20i$

3.9 संख्या-निकाय का और विस्तार ?

हम देख चुके हैं कि हमें वास्तविक संख्याओं के निकाय का सम्मिश्र संख्याओं में विस्तार करने की आवश्यकता पड़ी ताकि हम $x^2 = -3$ जैसे समीकरणों के हल प्राप्त करने में समर्थ हो सकें। हमने देखा कि यह निकाय सम्मिश्र गुणाकों के द्विघात समीकरणों को हल करने में भी पर्याप्त सिद्ध हुआ। यदि हमें उच्चतर घात, उदाहरणार्थ, त्रिघात (घात-3) (cubic), चतुर्थघात (घात-4) (biquadratic), इत्यादि समीकरणों के हल प्राप्त करने हों तो क्या हमें संख्या-निकाय का और अधिक विस्तार करने की आवश्यकता होगी ? नहीं। यह सिद्ध किया जा सकता है कि सम्मिश्र संख्याओं का निकाय वास्तविक अथवा सम्मिश्र गुणांकों के किसी भी घात के सभी बहुपद समीकरणों (polynomial equations) को हल करने के लिए पर्याप्त है। परन्तु इस कथन को सिद्ध करना इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।

3.10 ऐतिहासिक दृष्टिकोण

द्विघात समीकरणों की धारणा वस्तुतः अति पुरातन है। निश्चय ही लगभग 4000 वर्ष पूर्व बेबीलोन के निवासी द्विघात समीकरणों के विषय में जानते थे। लगभग 1600 ई० पू० के शिलालेख, जिन्हें 'येल टेबलेटस' (**Yale Tablets**) कहा जाता है, उपलब्ध हैं जिनमें द्विघात समीकरणों से सम्बन्धित अनेकों बिना हल की हुई समस्याएँ अंकित हैं।

यूनान के लोगों ने भी द्विघात समीकरणों का प्रयोग ज्यामितीय समस्याओं के हल करने में किया। सुप्रसिद्ध गणितज्ञ यूक्लिड (जन्म लगभग 365 ई० पू०) ने अपनी कृतियों में अनेकों द्विघात समीकरण दिए हैं।

द्विघात समीकरणों में हिन्दू गणितज्ञों का योगदान भी अति महत्वपूर्ण तथा विस्तृत है। यह कहा जाता है कि हिन्दुओं ने लगभग 500 ई० पू० में 'शुल्ब-सूत्र' के समय में अपने पूजा-स्थलों का निर्माण समीकरण $ax^2+bx-c=0$ के हलों के आधार पर किया था। आर्यभट्ट (जन्म 476 ई०) ने उस गुणोत्तर श्रेणी (geometric series) जिसमें द्विघात समीकरणों के हल सम्बद्ध हैं, के योग का नियम दिया है। ब्रह्मगुप्त (जन्म 598 ई०) ने उस द्विघात समीकरण का नियम दिया है जो द्विघात सूत्र की तरह ही है। लगभग 850 ई० में महावीर ने एक समस्या प्रस्तुत की थी जिसमें एक द्विघात समीकरण तथा उसके हल का प्रयोग सम्बद्ध था। लगभग 1025 ई० में हिन्दू गणितज्ञ श्रीधर ने सर्वप्रथम द्विघात समीकरण के हल के लिए नियम दिया था जो 'हिन्दू-नियम', (**Hindu Rule**) कहलाता है। यही नियम आजकल वर्ग पूर्ण करने की विधि (**method of completing the square**) कहलाता है।

अरब गणितज्ञ अल-ख्वारिज़मी ने लगभग 805 ई० में द्विघात समीकरण को हल करने की दो व्यापक विधियों का वर्णन किया है। वह दोनों विधियाँ यूनानियों की कृतियों पर आधारित हैं। लगभग 1100 ई० में उमर-खय्याम ने भी द्विघात समीकरण को हल करने का नियम दिया था।

यह जानना अत्यन्त रुचिकर है कि बेबीलोन तथा मिस्र के लोगों के समय से लेकर लगभग 1550 ई० तक जिन समीकरणों के हल किए जाते थे उनके सभी के संख्यात्मक गुणांक (numerical coefficients) थे। यद्यपि बहुत से गणितज्ञों ने जान लिया था कि संख्यात्मक गुणांकों के एक समुच्चय की विधि दूसरे समुच्चयों के लिए भी लागू होगी परन्तु उन्होंने इसे व्यापक रूप से सिद्ध नहीं किया। बीजीय समीकरणों (algebraic equations) में अक्षर संख्याओं (literal numbers) का व्यापक गुणांकों के रूप में प्रयोग करने की सक्षम तथा दूर-गामी धारणा का श्रेय महान फ्रांसीसी गणितज्ञ फ्रैंकोइस-वीटा (**1540-1603 ई०**) को जाता है। इससे भी अधिक आश्चर्यजनक बात यह है कि वीटा एक वकील थे जो फ्रांस के राजाओं के लिए काम करते थे। गणित उनके लिए केवल एक शौक था। अपने इस शौक के लिए उन्हें कितना अधिक 'परिश्रम' करना पड़ा होगा ?

अरबों के पश्चात् लगभग 800 वर्षों तक द्विघात समीकरणों के सम्बन्ध में कुछ महत्वपूर्ण कार्य नहीं हुआ। गुणनखण्डों के प्रयोग से द्विघात समीकरण के विषय में पहला महत्वपूर्ण कार्य थामस हैरियट (**1560-1621 ई०**) की कृतियों में मिलता है। आधुनिक समय में द्विघात समीकरणों में योगदान के लिए जो व्यक्ति विशेष उल्लेख के अधिकारी हैं उनमें स्विटज़रलैंड के गणितज्ञ लियोनार्ड ऑयलर (**1707-1783**), फ्रांस के गणितज्ञ ई० बेजौट (**1730-1783**) तथा ब्रिटिश गणितज्ञ जे० जे० सिलवैस्टर (**1814-1897**) हैं।

3.11 द्विघात असमीकरण (Quadratic Inequations)

अब हम वास्तविक गुणांकों के एक चर में द्विघात असमीकरणों के हल ज्ञात करना सीखेंगे। एक चर में द्विघात असमीकरण निम्न प्रकार का एक व्यंजक (expression) होता है :

$$ax^2+bx+c\leqslant 0 \text{ (अथवा} <0) \qquad (1)$$

$$ax^2+bx+c\geqslant 0 \text{ (अथवा} >0) \qquad (2)$$

जहाँ a, b तथा c कोई वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $a\neq 0$ है।

x के वे मान जो दिए हुए असमीकरण को संतुष्ट करते हैं, असमीकरण के हल कहलाते हैं। हल ज्ञात करने की दो विधियाँ हैं :

विधि I : तदनुरूपी बहुपद के गुणनखंड करके—यह बीजगणित की विधि कहलाती है।

विधि II : इस विधि में असमीकरण का आलेख खींचा जाता है। यह आलेखीय विधि कहलाती है।

उदाहरण 1 : निम्न असमीकरण के हल ज्ञात कीजिए :

$$x^2+3x-18\geqslant 0$$

हल :

विधि 1 : बीजगणित की विधि

$x^2+3x-18\geqslant 0$ (दिया हुआ है।)

अर्थात् $(x-3)(x+6)\geqslant 0$

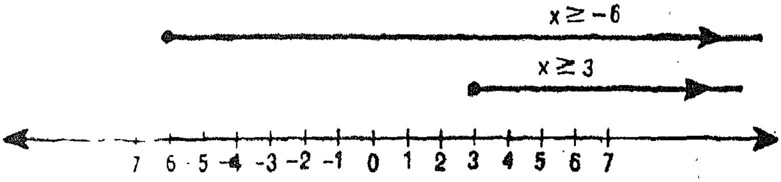
अब यह गुणनफल दो ही संभावनाओं में ऋणेतर हो सकता है।

स्थिति 1 : $(x-3)\geqslant 0$ तथा $(x+6)\geqslant 0$

अर्थात्, $x\geqslant 3$ तथा $x\geqslant -6$ (1)

हम देखते हैं कि (1) के दोनों असमीकरणों को एक साथ संतुष्ट होने के लिए यह आवश्यक है कि $x\geqslant 3$ हो। (क्यों ?)

[पाठक को चाहिए कि वह संख्या रेखा पर $x\geqslant 3$ तथा $x\geqslant -6$ आलेखित कर उनका प्रतिच्छेद ज्ञात करे। (देखिए आकृति 3.1)]



आकृति 3.1

स्पष्ट है, प्रतिच्छेद $x\geqslant 3$ है।

अतः स्थिति 1 के अनुसार वे सभी x जो $x\geqslant 3$ को संतुष्ट करते हैं असमीकरण के हल होंगे।

स्थिति 2 : $(x-3)\leqslant 0$ तथा $(x+6)\leqslant 0$ (2)

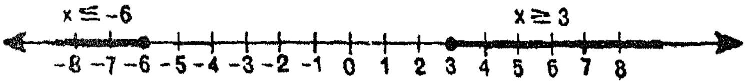
अर्थात्, $x\leqslant 3$ तथा $x\leqslant -6$

यह स्पष्ट है कि यदि $x\leqslant -6$ हो तो (2) के दोनों असमीकरण संतुष्ट हो जाते हैं।

अतः स्थिति 2 के अनुसार वे सभी x जो $x\leqslant -6$ को संतुष्ट करते हैं, असमीकरण के हल होंगे।

दोनों स्थितियों से हमें $x^2+3x-18\geqslant 0$ के सभी हल प्राप्त होते हैं। इन हलों में वे सभी x हैं जिनके लिए $x\leqslant -6$ या $x\geqslant 3$ है।

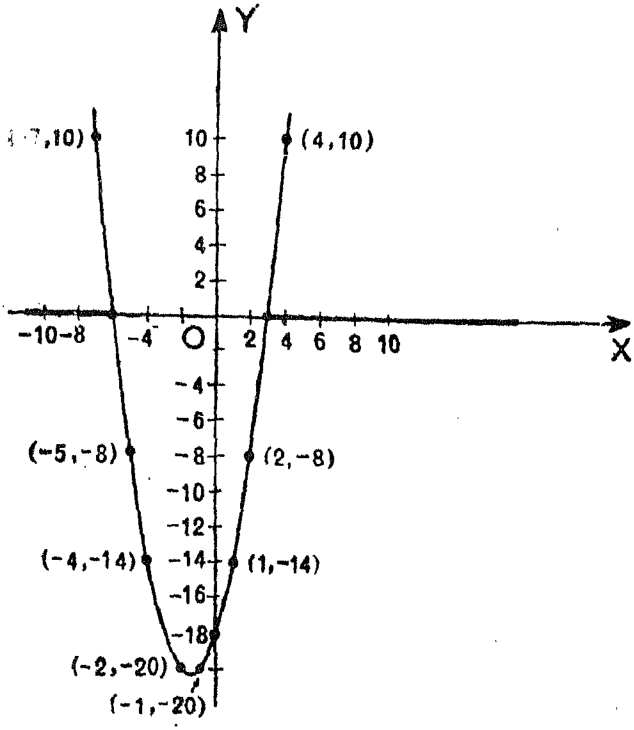
हम संख्या रेखा पर इन हलों को निम्न रूप से निरूपित करते हैं। (देखिए आकृति 3.2)



आकृति 3.2 : $x^2+3x-18\geqslant 0$ के हल

विधि II : ज्यामितीय विधि

संगत द्विघात फलन $f(x)=x^2+3x-18$ है। हम यह पहले सीख चुके हैं कि इस प्रकार के फलन का आलेख किस प्रकार खींचा जाता है। (देखिए आकृति 3.3) अब हमें x के वे मान चाहिए जिनके लिए



आकृति 3.3 : $x^2+3x-18\geqslant 0$ का आलेख तथा हल

$x^2+3x-18\geqslant 0$ है अर्थात्, $f(x)\geqslant 0$ अर्थात् $y\geqslant 0$ है। दूसरे शब्दों में, हम x के वे मान खोजते हैं जिनके लिए वक्र x अक्ष पर या उससे ऊपर हो।

स्पष्ट है, x के ये मान 3 (3 सहित) के दाईं ओर या —6 (—6 सहित) के बाईं ओर होंगे।

अतः हलों में वे सभी x सम्मिलित होंगे जिनके लिए $x\leqslant -6$ या $x\geqslant 3$ हो।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित असमीकरण के हल ज्ञात कीजिए :

$$15x^2+4x-4\leqslant 0$$

हल :

विधि 1 : $15x^2+4x-4\leqslant 0$ (दिया हुआ है)

अर्थात्, $(5x-2)(3x+2)\leqslant 0$ (क्यों ?)

अब यह गुणनफल धनेतर (non-positive) होने के लिए दो संभावनाएँ हो सकती हैं :

स्थिति 1 : $(5x-2)\geqslant 0$ तथा $(3x+2)\leqslant 0$

अर्थात्, $x\geqslant \frac{2}{5}$ तथा $x\leqslant -\frac{2}{3}$ (1)

निस्संदेह x का ऐसा कोई मान नहीं है जो (1) के दोनों असमीकरणों को एक साथ संतुष्ट करे। (क्यों ?)

अतः स्थिति 1 से कोई हल प्राप्त नहीं होता।

स्थिति 2 : $(5x-2)\leqslant 0$ तथा $(3x+2)\geqslant 0$

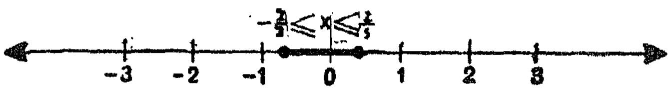
अर्थात्, $x\leqslant \frac{2}{5}$ तथा $x\geqslant -\frac{2}{3}$

या, $-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant \frac{2}{5}$

अतः हलों में वे सब x सम्मिलित हैं जिनके लिए

$$-\frac{2}{3}\leqslant x\leqslant \frac{2}{5}$$

हम आलेख द्वारा इन हलों को निम्न रूप से निरूपित करते हैं। (देखिए आकृति 3.4)



आकृति 3.4 : $15x^2+4x-4\leqslant 0$ के हल

विधि II : पाठक को तदनुरूपी फलन $f(x)=15x^2+4x-4$ का आलेख खींचना चाहिए तथा x के वे मान ज्ञात करने चाहिए जिनके लिए $f(x)\leqslant 0$ अर्थात् $y\leqslant 0$ हो। दूसरे शब्दों में, हम x के वे मान खोजते हैं जिनके लिए वक्र x—अक्ष पर या उससे नीचे हो।

प्रश्नावली 3.6

1. निम्न असमीकरणों के हल ज्ञात कीजिए । आलेखी विधि का प्रयोग कीजिए ।

   (i) $15x^2+4x-4\geqslant 0$

   (ii) $x^2-7x+6>0$

   (iii) $4-x^2<0$

   (iv) $9-x^2\geqslant 0$

   (v) $x^2-2x+1\geqslant 0$

2. निम्न असमीकरणों के हल ज्ञात कीजिए । बीजगणित की विधि का प्रयोग कीजिए । साथ ही संख्या रेखा पर हलों को निरूपित कीजिए ।

   (i) $x^2-2x+1<0$

   (ii) $x^2-4x-21\geqslant 0$

   (iii) $2-3x-2x^2\geqslant 0$

   (iv) $x^2+x-12\leqslant 0$

3.12 मुख्य संकल्पनाएँ

द्विघात सूत्र ($b^2-4ac<0$ की स्थिति के लिए)	सम्मिश्र गुणांकों के द्विघात समीकरण
सम्मिश्र संख्याओं के वर्गमूल	द्विघात असमीकरण

3.13 अग्रिम अध्ययन हेतु सुझाव

द्विघात समीकरणों तथा उच्च घातीय समीकरणों के सिद्धांतों का वर्णन निम्न पुस्तक में है :

[1] H.S. Hall and S.R. Knight : **Higher Algebra**, (4th edition) Macmillan and Company Ltd., London (U.K.), 1950.

रुचिपूर्ण ऐतिहासिक टिप्पणी सहित द्विघात समीकरणों के सुन्दर वर्णन के लिए निम्न पुस्तक देखें :

[2] Morris Kline: **Mathematics, A Cultural Approach**, Addison – Wesley Publishing Company, Inc., Massachusetts (U.S.A.), 1963.

हिन्दू गणितज्ञों का योगदान अनुच्छेद 1.12 में दी गई पुस्तकों [4] तथा [5] में उपलब्ध है । गणित के इतिहास की एक महत्वपूर्ण पुस्तक भी अनुच्छेद 1.12 में [7] में दी गई है ।

विविध प्रश्नावली I

(एकक I, II तथा III पर)

1. निश्चित कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं :

   (*i*) प्रत्येक प्राकृत संख्या एक परिमेय संख्या होती है।

   (*ii*) ऐसी दो प्राकृत संख्याएं हैं जिनका गुणनफल शून्य है।

   (*iii*) किन्हीं दो विषम प्राकृत संख्याओं का योग विषम होता है।

   (*iv*) विषम पूर्णांक व्यवकलन की संक्रिया के लिए संवृत नहीं होते।

   (*v*) किन्हीं दो भिन्न पूर्णांकों के बीच हम सदैव एक अन्य पूर्णांक ज्ञात कर सकते हैं।

   (*vi*) प्रत्येक दशमलव एक परिमेय संख्या को निरूपित करता है।

   (*vii*) संख्या रेखा पर दो भिन्न बिन्दु एक ही वास्तविक संख्या को निरूपित नहीं कर सकते।

   (*viii*) 0 एक परिमेय संख्या है।

   (*ix*) परिमेय संख्याएँ गुणन की संक्रिया के लिए संवृत होती हैं।

   (*x*) अपरिमेय संख्याएँ गुणन की संक्रिया के लिए संवृत होती हैं।

2. क्या $2\sqrt{7} \times 3\sqrt{7}$ परिमेय संख्या है? क्या $\frac{5\sqrt{\pi}}{11\sqrt{\pi}}$ परिमेय संख्या है?
   क्या $(3+\sqrt{7})(4-\sqrt{13})(3-\sqrt{7})(4+\sqrt{13})$ परिमेय संख्या है?

3. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को सांत अथवा असांत आवर्ती दशमलवों में व्यक्त कीजिए :

   (*i*) $\frac{34}{11}$ (*ii*) $\frac{2}{9}$

   (*iii*) $\frac{13}{40}$ (*iv*) $\frac{21}{37}$

   (*v*) $\frac{1}{7}$ (*vi*) $\frac{11}{90}$

4. वे परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिन्हें यदि दशमलवों में व्यक्त किया जाए तो निम्न प्रसार प्राप्त हों:

   (*i*) 5.6666... (*ii*) $2.\overline{27}$

   (*iii*) $8.\overline{181}$ (*iv*) $0.23\overline{564}$

   (*v*) $0.2373\overline{9}$ (*vi*) $0.\overline{2374}$

5. -2 तथा $\frac{7}{3}$ के बीच तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

6. यदि p^2, 5 का पूर्णांक गुणज है तो सिद्ध कीजिए कि p भी 5 का पूर्णांक गुणज है।
[संकेत : यदि p, 5 का पूर्णांक गुणज नहीं है तो यह $5k+1$ या $5k+2$ या $5k+3$ या $5k+4$ के रूप की संख्या है, जहाँ k एक पूर्णांक है।]

7. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।
[संकेत : उपरोक्त प्रश्न 6 का प्रयोग कीजिए।]

8. सिद्ध कीजिए कि द्विघात समीकरण $2x^2-x-\frac{3}{2}=0$ के मूल अपरिमेय हैं।

9. सिद्ध कीजिए कि $2+\sqrt{5}$, $2-\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ तथा $\frac{2}{\sqrt{5}}$ अपरिमेय संख्याएँ हैं।

10. निम्नलिखित संख्याओं को आरोही क्रम में लिखिए :
$\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $\sqrt{2}+\sqrt{6}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{11}-\sqrt{3}$

11 a तथा b को निर्धारित कीजिए ताकि $a<\sqrt{6}<b$ तथा $b-a<0.01$ हो।

12. क्या 0. 12112111211112 . . . अपरिमेय है ? क्यों ?

13. x तथा y का मान ज्ञात कीजिए यदि
   (*i*) $2x+3yi-4=9i$ (*ii*) $x+4yi=ix+y+3$
   (*iii*) $(x-yi)(3+5i)=-6+24i$

14. निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं को तल में निरूपित कीजिए :
   (*i*) $-12+8i$ (*ii*) $-3i$
   (*ii*) $3i$ (*iv*) $-12-8i$
   (*v*) $\frac{5}{2}$

15. तल में निम्नलिखित बिन्दुओं द्वारा निरूपित सम्मिश्र संख्याएँ लिखिए :
   (*i*) $(0,0)$ (*ii*) $(0,-1)$
   (*iii*) $(-1,0)$ (*iv*) $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{5}\right)$
   (*v*) $\left(\sqrt{2}, \frac{3}{4}\right)$ (*vi*) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

16. निम्नलिखित संक्रियाएँ कीजिए तथा परिणाम को $a+bi$ के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $(8+3\sqrt{8}i)+(5+2\sqrt{2}i)-(5+\sqrt{2}i)$

(ii) $(3-4i)+2i-(8+7i)$

(iii) $(4+3i)-(3+4i)$

(iv) $(7-2i)-(3+4i)-(-10+2i)$

(v) $(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)+6+4i$

(vi) $(5+4i)(-5-4i)+25+3i$

(vii) $(2i^3+3i^2-1)(4+5i)$

(viii) $(2+3i)(2-3i)(1+i)^2$

(ix) $\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}i\right)^2$

(x) $\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}i\right)^3$

(xi) $\dfrac{13+2i}{1+\sqrt{2}i}$

(xii) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{-7-i}$

(xiii) $\dfrac{(2-8i)(7+8i)}{1+i}$

(xiv) $\dfrac{(1-i)(2-i)(3-i)}{1+i}$

(xv) $\dfrac{(4+5i)^2}{(2+3i)^2}$

(xvi) $\dfrac{1}{i^7}$

(xvii) $\dfrac{1}{(-2+i)(1+3i)}$

(xviii) $i^{20}+(1-2i)^3$

(xix) $\dfrac{-i-2}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}$

17. सिद्ध कीजिए कि $1+i^2+i^4+i^6=0$

18. सिद्ध कीजिए कि $1+i^{10}+i^{20}+i^{30}$ एक वास्तविक संख्या है।

19. निम्नलिखित संख्याओं के व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए :

(i) $7+\sqrt{7}i$ (ii) $i-5$

20. यदि z एक सम्मिश्र संख्या है तो सिद्ध कीजिए कि $z+\bar{z}$ तथा $z\bar{z}$ सदैव वास्तविक संख्याएँ हैं।

21. निम्नलिखित में से प्रत्येक संख्या के सम्मिश्र संयुग्मी ज्ञात कीजिए :

(i) $(3-7i)^2$ (ii) $(\sqrt{7}i+2)^3$

(iii) $\dfrac{(8-3i)(6-i)}{2-2i}$

22. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{-441}{625}$ (ii) -32

(iii) $\frac{-8}{729}$

23. निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $-3\sqrt{-9}-2\sqrt{-16}+5\sqrt{-25}$

(ii) $(5+\sqrt{-36})(6+3\sqrt{-81})$

(iii) $(-1-\sqrt{-12})+\left(4+\frac{\sqrt{-25}}{2}\right)+\left(6-\frac{\sqrt{-36}}{3}\right)$

24. निम्नलिखित समीकरणों के मूल ज्ञात कीजिए :

(i) $y+14=4y^2$

(ii) $\sqrt{2}x^2-3x+3\sqrt{2}=0$

(iii) $6x^2-x+4=0$

(iv) $x(x+7)+14=0$

(v) $3x^{-2}+7x^{-1}+5=0$

(vi) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=120$

25. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों के मूल निर्धारित किए बिना उनकी प्रकृति बताइए :

(i) $x^2-x+1=0$ (ii) $7x^2+6x+3=0$

(iii) $6\sqrt{3}x^2-4x+\sqrt{3}=0$ (iv) $\sqrt{2}y^2-\sqrt{3}+\sqrt{3}y=0$

(v) $\frac{7}{8}x^2-x+\frac{2}{7}=0$

26. k के किन मानों के लिए निम्नलिखित में से प्रत्येक समीकरण के मूल वास्तविक तथा समान होंगे ?

(i) $3x^2-kx+k=0$

(ii) $5y^2-20y+(k-1)=0$

(iii) $kx^2+kx+1=-4x^2-x$

27. निम्नलिखित समीकरणों के मूल निर्धारित किए बिना उनके मूलों का योग तथा गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $x^2=-3$ (ii) $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{2}{3}=0$

(iii) $\sqrt{5}y^2-2\sqrt{5}y=5$

28. यदि a, b तथा c वास्तविक हों तो सिद्ध कीजिए कि
$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$ तभी तथा केवल तभी होगा जबकि $a=b=c$ हो।
[संकेत : 'यदि . . . तो' . . . भाग को सिद्ध करने के लिए वाम पक्ष को 'a' में द्विघात समीकरण समझिए।]

29. सिद्ध कीजिए कि समीकरण
$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ के मूल तभी तथा केवल तभी समान होंगे यदि $a=b=c$ हो।
[संकेत : उपरोक्त प्रश्न 28 का प्रयोग कीजिए।]

30. समीकरण $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}=\frac{1}{c}$ के मूलों का योग शून्य है। सिद्ध कीजिए कि मूलों का गुणनफल $-\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ है।

31. यदि समीकरण $k(x-1)^2=5x-7$ का एक मूल दूसरे का दुगुना हो, तो k का मान निर्धारित कीजिए।

32. समीकरण $ay^2+by+c=0$ के मूलों का अनुपात $p:q$ है। सिद्ध कीजिए कि $ac(p+q)^2=b^2pq$ है।

33. यदि द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ का एक मूल दूसरे का वर्ग है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$b^3+a^2c+ac^2=3abc$$

34. यदि α और β समीकरण $x^2-2x+3=0$ के मूल हों तो ऐसे समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\alpha+2$ तथा $\beta+2$ हों।

35. यदि α और β समीकरण $2x^2-5x+7=0$ के मूल हों तो ऐसी समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $2\alpha+3\beta$ तथा $3\alpha+2\beta$ हों।

36. वास्तविक गुणांकों के द्विघात समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके मूल निम्न हैं :

(i) $\sqrt{2}+3, \sqrt{2}-3$ (ii) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(iii) $1-i$ (iv) $\frac{3}{4}, \frac{4}{3}$

(v) $\sqrt{3}, -\sqrt{3}+1$

37. निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $2i$ (ii) $8i-15$
(iii) $-3+5i$ (iv) $8+6i$
(v) $8-6i$ (vi) $-8+6i$
(vii) $-8-6i$

38. निम्नलिखित समीकरणों को C पर हल कीजिए :

(i) $y^2-(2+i)y+(-1+7i)=0$

(ii) $2x^2+ix^2-2i=(5-i)x-2$

(iii) $x^2=(3-2i)x+(5i-5)$

*39. निम्नलिखित सर्वसमिका (identity) की जाँच कीजिए :

$x^4+4=(x-1-i)(x-1+i)(x+1+i)(x+1-i)$

40. यदि $x=1+\frac{1}{2}i$ हो, तो $3x^2+5x-8$ का मान ज्ञात कीजिए ।

41. आलेखी विधि द्वारा निम्न असमीकरणों को हल कीजिए :

(i) $4-(x-1)^2>0$ (ii) $2x^2-4x+1\leqslant 0$

(iii) $-x^2+2x-3\geqslant 0$ (iv) $-2x^2+9x+18\leqslant 0$

42. बीजगणित की विधि द्वारा निम्न असमीकरणों को हल कीजिए । हलों को संख्या रेखा प भी निरूपित कीजिए ।

(i) $x^2+x+\frac{1}{4}\geqslant 0$ (ii) $x^2-x-20\leqslant 0$

(iii) $(x-2)^2+1<0$

घातांक

यह एक पुनरावलोकन एकक है। यह मान लिया गया है कि पाठक घातांकों (exponents) के मूल नियमों से पहले से ही परिचित हैं तथा सरल घातांकीय समीकरणों (exponential equations) को हल करना जानते हैं। हम नीचे पुनरावलोकन हेतु एक प्रश्नावली दे रहे हैं ताकि आपने जो अब तक पढ़ा है उसे आप दोहरा सकें। यदि आपको किसी संकल्पना के विषय में कोई कठिनाई हो तो पिछली कक्षाओं में पढ़ी गई सामग्री का अध्ययन करें।

1. यदि 'a' एक शून्येतर वास्तविक संख्या है तथा m एक प्राकृत संख्या, तो a^m को निम्न रूप से परिभाषित करते हैं :

$$a^m = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{(m \text{ बार})}$$

यहाँ a को आधार (base); m को a का घातांक (exponent) तथा a^m को a की घात m (m^{th} power) कहा जाता है।

हम परिभाषित करते हैं कि $a^0 = 1$

परिकलित कीजिए :

$$3^4;\ (-2)^3;\ \left(\tfrac{1}{4}\right)^5,\ (2\sqrt{2})^5;\ \left(-\frac{2}{5}\right)^2$$

[घातांकीय संकेतन (exponential notation) का प्रयोग सर्वप्रथम डायोफेन्टस (जन्म लगभग 250 ई०) ने किया था। डायोफेन्टस के जीवन के विषय में कुछ अधिक ज्ञात नहीं है। केवल इतना ही ज्ञात है कि सम्भवतः वे यूनानवासी थे। यूनान में एकत्रित की गई सामग्री में एक बीजगणितीय समस्या* है

* पाठक निम्न पुस्तक का अध्ययन करें :

Morris Kline : **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times**, Oxford University Press, New York (U.S.A.), 1972, Page 139.

जिससे डायोफैन्टस के जीवन के विषय में निम्न तथ्य ज्ञात हुए हैं :

उनका बाल्यकाल उनके जीवन के $\frac{1}{6}$ भाग में समाप्त हुआ; उनकी दाढ़ी इससे $\frac{1}{12}$ भाग के बाद बढ़ी; इससे $\frac{1}{7}$ भाग के बाद उनका विवाह हुआ तथा 5 वर्ष बाद उनके पुत्र का जन्म हुआ। पुत्र पिता की आधी आयु पर्यन्त जीवित रहा और पिता की मृत्यु पुत्र से 4 वर्ष पश्चात् हुई।

क्या आप डायोफैन्टस की आयु ज्ञात कर सकते हैं ? उत्तर 84 वर्ष है।]

2. (ऋणेत्तर पूर्णांकीय) घातांकों के निम्न नियम आपको याद होंगे :

मान लीजिए a तथा b शून्येतर वास्तविक संख्याओं को व्यक्त करते हैं और m तथा n ऋणेतर पूर्णांकों को व्यक्त करते हैं। तब,

I. $a^m a^n = a^{m+n}$

II. $\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, \text{ यदि } m \geqslant n \\ \frac{1}{a^{n-m}}, \text{ यदि } m \leqslant n \end{cases}$

III. $(a^m)^n = a^{mn}$

IV. $(a\,b)^m = a^m b^m$

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

घातांकों के नियमों का प्रयोग करके निम्नलिखित संक्रियाएँ कीजिए :

(i) $(-3)^0$; -2^6 ; $(-2)^6$

(ii) $(4^2)(4^3)$; $(-2)^3(-2)^5$; $(\frac{1}{3})^4(\frac{1}{3})^2$

(iii) $\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^6}{\left(\frac{5}{2}\right)^3}$; $\frac{y^2}{y^8}$; $\frac{x^3}{x^5}$; $\frac{x^8}{x^3}$; $\frac{x^0}{x^2}$

(iv) $[(-\frac{1}{2})^2]^3$; $(a^2)^3$; $(c^3)^0$; $(2b^3)^3$

(v) $(-a^3b^2)^4$; $(-\frac{3}{2}x^2y)^3$; $(x^2y)(-3xy^3)(\frac{5}{3}xy)$

(vi) $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^2$; $\left(\frac{2a^3}{b^4}\right)^4$; $\left(\frac{-3x^2y^3}{2ab^2}\right)^5$

(vii) $\frac{2}{7}a^3b^2\left(-\frac{49}{2}a^5b^3\right)$; $\frac{3a^m(5b^n)^2}{(a^{2m})^2}$

3. अब हम एक शून्येतर वास्तविक संख्या 'a' की ऋणात्मक पूर्णांकीय घातों (**negative integral powers**) को परिभाषित करते हैं। हम इस की परिभाषा इस प्रकार से चाहेंगे कि नियम I – V यहाँ भी लागू हों। उदाहरणार्थ, यदि m एक धनात्मक पूर्णांक है तो हम a^{-m} को इस प्रकार परिभाषित करना चाहेंगे कि नियम I यहाँ भी लागू रहे।

अर्थात्, $a^m a^{-m} = a^{m-m} = a^0 = 1$

इससे a^{-m} की निम्न परिभाषा का सुझाव मिलता है :

यदि a एक शून्येतर वास्तविक संख्या है तथा m एक धनात्मक पूर्णांक है, तो

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

हम कहते हैं कि a^{-m} तथा a^m एक दूसरे के **व्युत्क्रम** हैं। इस परिभाषा के साथ अब हम **(पूर्णांकीय)** घातांकों के निम्न नियम प्राप्त करते हैं :

यदि a और b शून्येतर वास्तविक संख्याओं तथा m और n पूर्णांकों को व्यक्त करते हों, तो

I. $a^m a^n = a^{m+n}$

II. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

III. $(a^m)^n = a^{mn}$

IV. $(ab)^m = a^m b^m$

V. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

(क) परिकलित कीजिए :

5^{-3} ; $(-3)^{-2}$; $(\sqrt{7})^{-4}$; $(\frac{3}{5})^{-2}$

(ख) घातांकों के नियमों का प्रयोग करके निम्नलिखित संक्रियाएँ कीजिए। आपके उत्तर में कोई ऋणात्मक घातांक नहीं आना चाहिए।

(i) $4^{-3}4^6$; $(\frac{1}{2})^{-2}(\frac{1}{2})^{-3}$; $6^{-2}6^{-1}\ 6^0$

(ii) $\frac{11^{-3}}{11^{-5}}$; $\frac{a^2}{a^5}$

(iii) $(\frac{3}{4})^{-1}$; $(4^{-2})^3$; $(2^{-3})^{-3}$; $[(\frac{1}{2})^2]^{-1}$

(iv) $(2^{-1}3^{-2})^3$; $(5^{-2}4^4)^{-2}$; $(6^{-1}4^3)^{-1}$

(v) $(\frac{5}{3})^{-2}$; $(\frac{2^{-2}}{7})^{-1}$; $(3^{-2})^{-4}\ (2^{-3})^{-2}$

(vi) $\frac{a^{-1}m^{-2}}{a^{-2}m^{-1}}$; $\frac{2^{-1}m^{-4}n^{-1}}{3^{-1}m^{-2}n^2}$

4. अब हम एक धनात्मक वास्तविक संख्या की **परिमेय घातों (rational powers)** को परिभाषित करते हैं। पुनः यह परिभाषा इस प्रकार की होनी चाहिए कि नियम I-V यहाँ भी लागू रहें। **अब** यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या है तथा n एक प्राकृत संख्या है तो हमें $a^{\frac{1}{n}}$ को किस प्रकार परिभाषित करना चाहिए ? यह परिभाषा ऐसी होनी चाहिए कि

$$\underbrace{a^{\frac{1}{n}} \times a^{\frac{1}{n}} \times \ldots \times a^{\frac{1}{n}}}_{n \text{ बार}} = a^{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}} = a^{\frac{n}{n}} = a$$

दूसरे शब्दों में, $a^{\frac{1}{n}}$ की nवीं घात a होनी चाहिये जो कि यह कहने के समान है कि $a^{\frac{1}{n}}$, a का nवाँ मूल*, जिसे $\sqrt[n]{a}$ लिखा जाता है, होना चाहिए। इससे $a^{\frac{1}{n}}$ की निम्न परिभाषा का सुझाव मिलता है :

यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या है तथा n एक प्राकृत संख्या है, तो

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

अब हम a की परिमेय** घात को परिभाषित करते हैं।

यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, m एक पूर्णांक है तथा n एक प्राकृत संख्या है, तो

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

अब हम दो महत्वपूर्ण परिणाम सिद्ध करते हैं।

(i) यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या, m एक पूर्णांक तथा n और p प्राकृत संख्याएँ हैं, तो

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$$

क्योंकि यदि हम यह मान लें कि $\sqrt[np]{a^{mp}} = c$, तो

$$a^{mp} = c^{np}$$

दोनों पक्षों का p वाँ मूल लेने पर,

$$a^m = c^n$$

जिससे, $c = \sqrt[n]{a^m}$

इस प्रकार, $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

(ii) यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या, m एक पूर्णांक तथा n एक प्राकृत संख्या है, तो

$$\sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

मान लीजिए कि $\sqrt[n]{a^m} = b$

तब, $a^m = b^n$ (1)

अब मान लीजिए कि $\sqrt[n]{a} = c$

तब, $a = c^n$

जिससे, $a^m = (c^n)^m = c^{mn} = (c^m)^n$

अतः (1) से,

$$b^n = (c^m)^n \qquad (2)$$

---

*प्रत्येक धनात्मक संख्या a और प्राकृत संख्या n के लिए एक अद्वितीय धनात्मक संख्या b ऐसी होती है कि $b^n = a$ हो। b, a का nवाँ मूल (nth root) कहलाता है। [इसकी उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।]

**हम एक परिमेय घातांक को सदा इस प्रकार से लिखेंगे कि इसका हर धनात्मक हो।

(2) के दोनों पक्षों का n वाँ मूल लेने पर,

$$b = c^m$$

अर्थात्, $\sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$

अतः विकल्पतः हम a की परिमेय घात को निम्न प्रकार परिभाषित कर सकते हैं :

यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या, m एक पूर्णांक तथा n एक प्राकृत संख्या है, तो

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

[एक ऋणात्मक वास्तविक संख्या की परिमेय घात की परिभाषा इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।]

अब परिणामों (*i*) और (*ii*) तथा परिभाषा का उपयोग करते हुए हम (परिमेय) घातांकों के निम्न नियम प्राप्त करते हैं :

यदि a और b धनात्मक वास्तविक संख्याओं को, m और p पूर्णांकों को तथा n और q प्राकृत संख्याओं को व्यक्त करते हों, तो

I. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}}$

II. $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}}$

III. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}}$

IV. $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} b^{\frac{m}{n}}$

V. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

(क) **परिकलित कीजिए :**

$(81)^{\frac{1}{4}}$; $\left(\frac{1}{49}\right)^{\frac{1}{2}}$; $(128)^{\frac{3}{7}}$; $(216)^{\frac{4}{3}}$; $9^{-\frac{1}{2}}$; $27^{-\frac{1}{3}}$; $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

$\left(\frac{81}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$; $\left(16^{-\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{2}}$; $\left(3y^{-\frac{5}{3}}\right)^{-3}$

(ख) घातांकों के नियमों का प्रयोग करके सरल कीजिए। अपना उत्तर बिना ऋणात्मक घातांकों का प्रयोग किए दीजिए।

(*i*) $y^0\, y^{\frac{5}{3}}\, y^{\frac{1}{6}}$ (*ii*) $(a^{-2}y^{-3})^{-2}$

(iii) $\left(3y^{-\frac{3}{8}}\right)^{-1}$ (iv) $\left(x^{-2}y^{-\frac{2}{5}}\right)^{-1}$

(v) $\dfrac{3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{4}{3}}}{2a^{\frac{3}{2}}b^{-\frac{2}{3}}}$ (vi) $\left(8y^{-3}x^{6}\right)^{-\frac{2}{3}}$

(vii) $\dfrac{(49)^{\frac{1}{2}}a^{-1}y^{-2}}{(81)^{\frac{1}{4}}a^{-2}y^{-\frac{1}{3}}}$ (viii) $\left(\dfrac{2m^2n^{-\frac{4}{5}}}{m^0n^{-\frac{3}{5}}}\right)^{-5}$

(ix) $\left(x^{\frac{1}{2}}+1\right)\left(x^{\frac{1}{2}}-1\right)$ (x) $\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^{2}$

(xi) $\dfrac{3^{-2}-2^{-2}}{3^{-2}2^{-2}}$ (xii) $\dfrac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}$

(xiii) $[(\sqrt[3]{125})-2]^{-2}$

5. यह सुगमतापूर्वक सिद्ध किया जा सकता है कि यदि a एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, $(a \neq 1)$; m और p पूर्णांक हैं तथा n और q प्राकृत संख्याएँ हैं, तो

$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{p}{q}}$, तभी तथा केवल तभी होगा जबकि $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ हो।

निम्नलिखित में से प्रत्येक घातांकीय समीकरण को हल कीजिए :

(i) $2^x = 4^{2x-1}$ (ii) $3^x = 3^{-x}$ (iii) $5^x = 125$ (iv) $3^{y-1} = 9$

(v) $4^{x+2} = (16)^x$ (vi) $(10)^{3y-3} = 1000$ (vii) $(25)^x = 5$

(viii) $6^y = \dfrac{1}{216}$

अनुक्रम तथा श्रेणियाँ

इस एकक में हम अनुक्रम और श्रेणियों, विशेष रूप से, समांतर और गुणोत्तर श्रेणियों का अध्ययन करेंगे। हम सीखेंगे कि इनका योग किस प्रकार ज्ञात किया जाता है। किसी अनुक्रम की 'सीमा' (limit) की संकल्पना में स्वतः शोध की विधि का प्रयोग करते हुए अपरिमित गुणोत्तर श्रेणी के योग और उसके, एक ऐसी परिमेय संख्या ज्ञात करने में जिसका दशमलव प्रसार एक दिया हुआ असांत आवर्ती दशमलव हो, अनुप्रयोग का उल्लेख किया गया है। अंत में वर्गों और घनों के अनुक्रमों पर विचार किया गया है।

5.1 अनुक्रम क्या होते हैं ?

शीला किसी बैंक में 10% वार्षिक दर से चक्रवृद्धि ब्याज पर 15 वर्ष के लिए 1000 रुपए जमा कराती है। पहले, दूसरे, तीसरे,⋯वर्ष के अन्त में उसकी राशि रुपयों में (निकटतम पैसों तक) निम्न हो जाती है :

1100, 1210, 1331, 1464.10, 1610.51, 1771.56, 1948.72, 2143.59, 2357.95, 2593.75, 2853.13, 3138.44, 3452.28, 3797.51, 4177.26

इन राशियों से बने क्रम को हम **अनुक्रम** (sequence) अथवा अधिक स्पष्ट रूप से **परिमित अनुक्रम** (**finite sequence**) कहते हैं।

अब 10 को 3 से भाग करने पर प्राप्त उत्तरोत्तर भागफलों पर विचार कीजिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

3, 3.3, 3.33, 3.333, 3.3333, इत्यादि।

ये भागफल एक **अनुक्रम** बनाते हैं। अधिक स्पष्ट शब्दों में हम इसे एक **अपरिमित अनुक्रम** (**infinite sequence**) कहते हैं। यह इस अर्थ में अपरिमित है कि इसका कहीं अंत नहीं होता।

उपरोक्त उदाहरणों में हमने ऐसे अनुक्रम प्राप्त किए हैं जिनका प्रतिरूप (pattern) स्पष्ट रूप से पहचाना जा सकता है। परन्तु ऐसा सदा नहीं होता।

उदाहरणार्थ, अनुक्रम 3,2,17,2,2, — 5, $\sqrt{13}$, 4, $6\frac{1}{2}$, −5, $4\frac{108}{371}$, 2 पर विचार कीजिए।

स्पष्ट है कि इस अनुक्रम का प्रतिरूप स्पष्ट रूप से नहीं पहचाना जा सकता।

अब, एक अनुक्रम क्या होता है ?

अनुक्रम * से हमारा अभिप्राय संख्याओं की, किसी नियम के अनुसार, एक निश्चित क्रम से की गई व्यवस्था (arrangement) से है। आगे चलकर हम अनुक्रम को स्पष्ट रूप से परिभाषित करेंगे।

किसी अनुक्रम में आने वाली विभिन्न संख्याएँ उसके पद (terms) कहलाती हैं। हम किसी अनुक्रम के पदों को t_1, t_2, ... अथवा a_1, a_2, ..., इत्यादि से व्यक्त करते हैं— जहाँ अक्षर के साथ लिखी संख्या (subscript) पद की स्थिति को व्यक्त करती है। nवाँ पद अनुक्रम में nवीं स्थिति पर दी गई संख्या होती है तथा इसे t_n अथवा a_n से व्यक्त किया जाता है। कभी-कभी nवाँ पद अनुक्रम का **व्यापक पद (general term)** भी कहलाता है। इस प्रकार, विभिन्न राशियों के अनुक्रम में (शीला की जमा राशियाँ देखिए) प्रथम पद t_1, 1100 है तथा t_2 =1210, t_7=1948.72, t_{12}=3138.44, t_{15}=4177.26 है। इसी प्रकार, उत्तरोत्तर भागफलों के उदाहरण में (10 का 3 से भाग देखिए) a_2=3.3, a_6=3.33333, इत्यादि।

अनुक्रमों के कुछ अन्य उदाहरण निम्न हैं :

विषम प्राकृत संख्याओं का अनुक्रम : 1, 3, 5, 7, 9, ...

सम धनात्मक पूर्णांकों का अनुक्रम : 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

अभाज्य संख्याओं का अनुक्रम : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...

जनवरी 1978 में रविवारों
की तिथियों का अनुक्रम : 1, 8, 15, 22, 29

क्या आप बता सकते हैं कि उपरोक्त उदाहरणों में कौन से परिमित तथा कौन से अपरिमित अनुक्रम हैं ?

5.2 किसी अनुक्रम का nवाँ पद अथवा व्यापक पद

प्रायः बीजगणितीय सूत्र के रूप में एक ऐसे नियम को व्यक्त करना सम्भव है जिससे किसी अनुक्रम के विभिन्न पदों को प्राप्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, विषम प्राकृत संख्याओं के अनुक्रम **पर विचार कीजिए।** यहाँ,

$$a_1 = 1 = 2 \times 1 - 1$$
$$a_2 = 3 = 2 \times 2 - 1$$
$$a_3 = 5 = 2 \times 3 - 1$$

वस्तुतः हम देखते हैं कि **इस अनुक्रम का nवाँ पद** निम्न रूप से लिखा जा सकता है :

$a_n = 2n - 1$, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

इसी प्रकार, **सम धनात्मक पूर्णांकों के अनुक्रम** में nवाँ पद t_n, सूत्र $t_n = 2n$ से प्राप्त होता है, जहाँ n **एक प्राकृत संख्या है।**

परन्तु अभाज्य संख्याओं के अनुक्रम में nवीं अभाज्य संख्या प्राप्त करने के लिए कोई ज्ञात सूत्र नहीं है।

---

* हम प्रस्तुत अध्ययन को वास्तविक संख्याओं के अनुक्रमों तक ही सीमित रखेंगे।

दूसरे शब्दों में, हमें यह अपेक्षा नहीं करनी चाहिए कि किसी अनुक्रम के पद आवश्यक रूप से एक सूत्र के ही रूप में दिए होंगे। परन्तु हम एक ऐसी सैद्धान्तिक योजना अथवा नियम की अवश्य अपेक्षा करते हैं जिससे n के किन्हीं मानों के लिए व्यापक पद t_n प्राप्त किया जा सके। अतः एक अनुक्रम वस्तुतः एक फलन (function) है जिसका प्रांत (domain) प्राकृत संख्याओं का समुच्चय (set) N अथवा इसका कोई उपसमुच्चय (subset) है। अब हम अनुक्रम को निम्न रूप से परिभाषित करते हैं :

कोई अनुक्रम एक फलन होता है यदि उसका प्रांत या तो N या $\{1,2,3,\ldots,k\}$ के रूप का N का कोई उपसमुच्चय हो। जब प्रांत सम्पूर्ण N होता है, तो हम इसे **अपरिमित अनुक्रम** कहते हैं। जब प्रांत $\{1,2,3,\ldots,k\}$ के रूप का N का एक उपसमुच्चय होता है, तो हम इसे **परिमित अनुक्रम** कहते हैं।

अतः हम कभी-कभी फलन के संकेतन का प्रयोग करते हैं तथा t_n के लिए $t(n)$ अथवा a_n के लिए $a(n)$ का प्रयोग करते हैं।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : निम्न से परिभाषित अनुक्रमों के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए

(i) $a_n = n(n+1)$ (ii) $t(n) = \dfrac{n}{n+1}$

(iii) $t_n = n^2 - 16$

हल : (i) $a_n = n(n+1)$

$n = 1, 2$ तथा 3 प्रतिस्थापित करने पर हम निम्न तीन पद प्राप्त करते हैं :

$a_1 = 1(2) = 2$, $a_2 = 2(3) = 6$ तथा $a_3 = 3(4) = 12$

(ii) $t(n) = \dfrac{n}{n+1}$

इस प्रकार, $t(1) = \dfrac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $t(2) = \frac{2}{3}$ तथा $t(3) = \frac{3}{4}$

(iii) $t_n = n^2 - 16$

t_n में $n = 1, 2$ तथा 3 प्रतिस्थापित करने पर हम निम्न तीन पद प्राप्त करते हैं :

$t_1 = 1^2 - 16 = -15$,

$t_2 = 2^2 - 16 = -12$ तथा

$t_3 = 3^2 - 16 = -7$

उदाहरण 2 : अनुक्रम $a(n) = \dfrac{n(n+3)}{n+1}$ का 17 वाँ पद क्या है ?

हल : हम $n = 17$ प्रतिस्थापित करते हैं तथा निम्न प्राप्त करते हैं :

$a(17) = \frac{17(20)}{18} = \frac{170}{9}$

अतः, 17 वाँ पद $\frac{170}{9}$ है।

उदाहरण 3 : निम्न अनुक्रम का 960 वाँ तथा 961वाँ पद ज्ञात कीजिए :

$$t_n = \begin{cases} \dfrac{n}{\dfrac{n}{96}-1}, & \text{यदि } n \text{ किसी प्राकृत संख्या का वर्ग नहीं है} . \\ 6\frac{1}{2}, & \text{यदि } n \text{ किसी प्राकृत संख्या का वर्ग है} . \end{cases}$$

हल : क्योंकि $961=31^2$, अर्थात् 961 प्राकृत संख्या 31 का वर्ग है, अतः $t_{961}=6\frac{1}{2}$

साथ ही, क्योंकि 961 एक प्राकृत संख्या का वर्ग है, अतः स्पष्ट है कि 960 किसी प्राकृत संख्या का वर्ग नहीं है। इस प्रकार,

$$t_{960}=\frac{960}{\frac{960}{96}-1}=\frac{960}{9}=106\frac{2}{3}$$

अतः, 960 वाँ पद $106\frac{2}{3}$ है तथा 961 वाँ पद $6\frac{1}{2}$ है।

उदाहरण 4 : निम्न द्वारा प्राप्त अनुक्रम के प्रथम पाँच पद ज्ञात कीजिए :

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=a_{n-1}+2, \ n\geqslant 2 \end{cases}$$

हल : यहाँ $a_1=1$

$n=2$ प्रतिस्थापित करने पर,

$a_2=a_1+2=3$

क्रमशः $n=3$, 4 तथा 5 प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$a_3=a_2+2=5$

$a_4=a_3+2=7$

तथा $a_5=a_4+2=9$

इस प्रकार, प्रथम पाँच पद 1,3,5,7 तथा 9 हैं।

***उदाहरण 5 :** मान लीजिए $a(n)$, 9 पदों का एक परिमित अनुक्रम है जिसके पद $a(1), a(2), \ldots, a(9)$ निम्न रूप से परिभाषित हैं :

$$a(n)=\begin{cases} 1, & \text{यदि } \frac{4}{3} \text{ के दशमलव प्रसार में अंक } n \text{ असंख्य बार (infinitely many times) आता हो} \\ 2, & \text{यदि } \frac{4}{3} \text{ के दशमलव प्रसार में अंक } n \text{ विषम बार (odd number of times) आता हो} \\ 3, & \text{यदि } \frac{4}{3} \text{ के दशमलव प्रसार में अंक } n \text{ सम बार (even number of times) आता हो} \end{cases}$$

इस अनुक्रम के सभी पद ज्ञात कीजिए।

हल : $a(1)$ के लिए हमें सर्वप्रथम यह निर्धारित करना है कि $\frac{4}{3}$ के दशमलव प्रसार में अंक 1 कितनी बार आता है। यह केवल एक बार अर्थात् विषम बार आता है। अत: $a(1)=2$

अंक 2, $\frac{4}{3}$ के दशमलव प्रसार में, 0 बार आता है (अर्थात् यह नहीं आता)। क्योंकि 0 एक सम संख्या है, अत: $a(2)=3$। इसी प्रकार, $a(4)=a(5)=a(6)=a(7)=a(8)=a(9)=3$

अंक 3, असंख्य बार आता है। इस प्रकार, $a(3)=1$

अत: इस अनुक्रम के पद 2, 3, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3 हैं।

अंत में हम एक ऐसे परिमित अनुक्रम का उदाहरण देते हैं जहाँ पदों को व्यक्त करने का नियम तो दिया है परन्तु हम स्पष्ट रूप से पदों को ज्ञात नहीं कर सकते।

*उदाहरण 6 : मान लीजिए $a(n)$, 10 पदों का एक परिमित अनुक्रम है जिसके पद $a(1), a(2), \ldots, a(10)$ निम्न रूप से परिभाषित हैं :

$$a(n)=\begin{cases} 1, & \text{यदि } \pi \text{ के दशमलव मान में अंक } n \text{ असंख्य बार आता है} \\ 2, & \text{यदि } \pi \text{ के दशमलव मान में अंक } n \text{ विषम बार आता है} \\ 3, & \text{यदि } \pi \text{ के दशमलव मान में अंक } n \text{ सम बार आता है} \end{cases}$$

तथा $a(10)=1$, 2 अथवा 3, जो अंक 0 के उपरोक्त प्रकार से घटित होने पर निर्भर करता है।

टिप्पणी : हम जानते हैं कि π का दशमलव मान असांत अनावर्ती है तथा अभी तक केवल 500,000 स्थानों तक ही इसका मान परिकलित किया जा सका है (देखिए अनुच्छेद 1.8)। अत: यह कहना सम्भव नहीं है कि दशमलव मान में अमुक अंक कितनी बार आता है। इस प्रकार, इस परिमित अनुक्रम के प्रथम पद तक का निर्धारण भी करना सम्भव नहीं है।

प्रश्नावली 5.1

उन अनुक्रमों के प्रथम पाँच पद लिखिए जिनके nवें पद निम्न हैं :

1. $a_n=\dfrac{2n-3}{6}$

2. $t_n=(-1)^{n-1}\, 5^{n+1}$

3. $t_n=2^n$

4. $a(n)=\dfrac{3n^2}{(n-\frac{1}{2})(n+1)}$

5. $a(n)=\dfrac{n(n+1)}{2}$

6. $a(n)=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

उन अनुक्रमों जिनके nवें पद (अर्थात् व्यापक पद) निम्न हैं, के दर्शाए गए पद ज्ञात कीजिए :

7. $t_n = 4n+3$; 18 वाँ पद, 21 वाँ पद

8. $t_n = \frac{n^2}{3^n}$; t_4

9. $t_n = (-1)^n n^2$; t_8

10. अनुक्रम $a(n)$, $a(n)=(n-1)(n-2)(n-3)$ से परिभाषित है। दिखाइए कि इस अनुक्रम के प्रथम तीन पद शून्य हैं परन्तु शेष सभी पद धनात्मक हैं।

निम्न सूत्रों द्वारा दिए गए अनुक्रमों के प्रथम छ: पद ज्ञात कीजिए:

11. $a_1 = a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1} - 1$ $(n > 2)$

12. $a_1 = -1$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$ $(n \geqslant 2)$

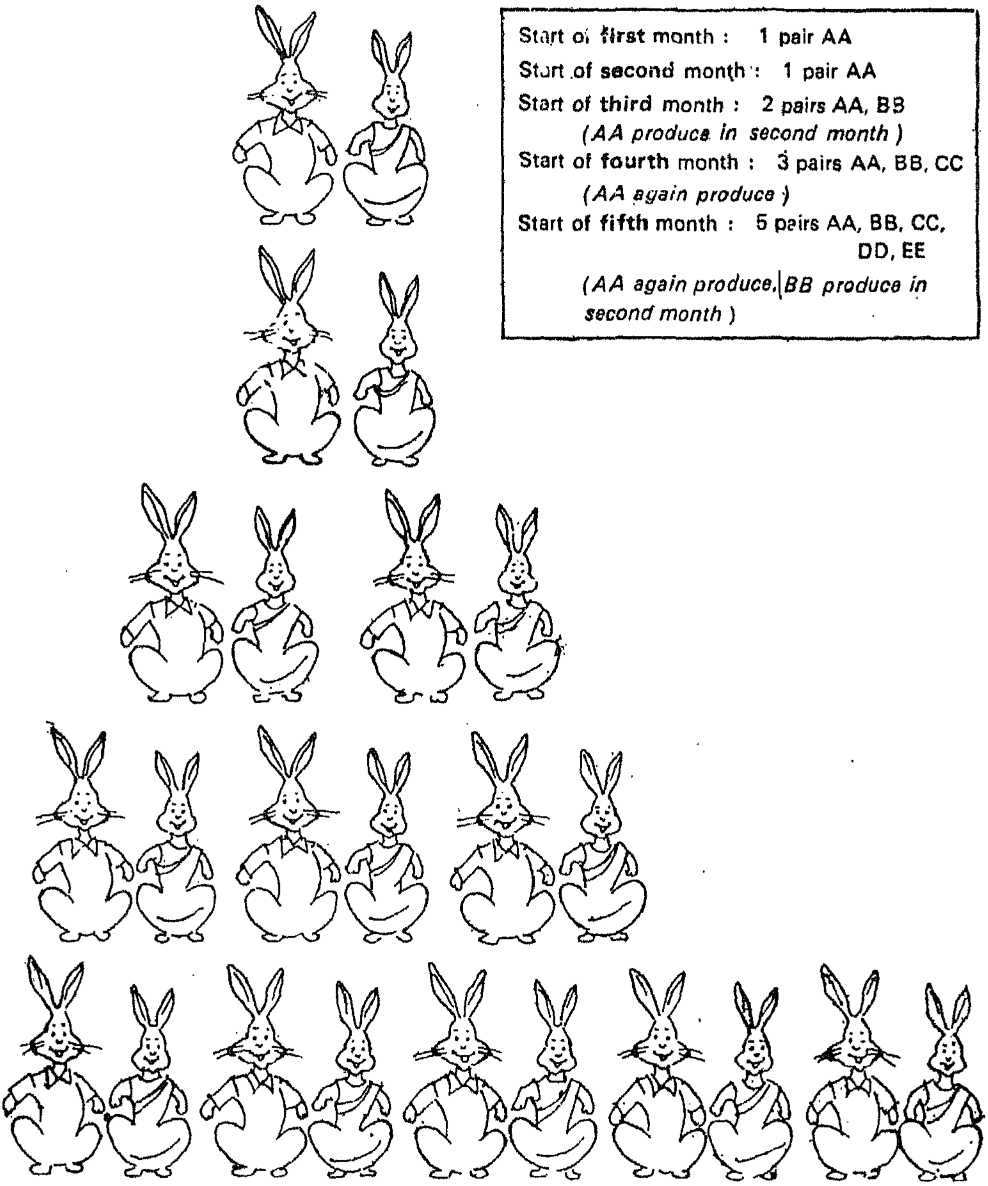
13. $a_1 = a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n \geqslant 3)$

[प्रश्न 13 के अनुक्रम के पद **फिबोनाशी संख्याएँ** (**Fibonacci numbers**) कहलाती हैं, जिनका नाम इटली के महान गणितज्ञ **लियोनारडो फिबोनाशी** (**1170—1250 ई०**) के नाम पर रखा गया था। गणित के लिए उनका योगदान शीर्षस्थ है। यद्यपि हिन्दू गणित अरबों तक पहुँच चुका था तथापि मध्य युग में इसके यूरोप में प्रभाव तथा प्रसार का श्रेय फिबोनाशी को ही है।

1202 ई० में फिबोनाशी ने बीजगणित पर एक पुस्तक **लिबर अबासी** (**Liber Abaci**) लिखी तथा उसमें प्रसिद्ध खरगोश समस्या (rabbit problem) प्रस्तुत की जो निम्न है :

खरगोशों का एक जोड़ा अल्पायु होने के कारण प्रथम मास में संतानोत्पत्ति नहीं कर सकता। द्वितीय तथा प्रत्येक उत्तरोत्तर मास में वे एक नए खरगोशों के जोड़े को जन्म देते हैं। इसी प्रकार खरगोशों का प्रत्येक नया जोड़ा भी अपने द्वितीय तथा प्रत्येक उत्तरोत्तर मास में एक नए जोड़े को जन्म देता है। अगर यह मान लिया जाए कि किसी खरगोश की मृत्यु नहीं होती तो प्रत्येक मास के प्रारम्भ में खरगोशों के कितने जोड़े होंगे ?]

हम आकृति 5.1 में दर्शाई गई स्थिति प्राप्त करते हैं।



आकृति 5.1

इस प्रकार, प्रत्येक मास के प्रारम्भ में इन जोड़ों की संख्याएँ सुप्रसिद्ध फिबोनाशी अनुक्रम बनाती हैं ।]

14. $t_n = an^2 + bn + c$ द्वारा परिभाषित अनुक्रम पर विचार कीजिए । यदि $t_2 = 3$, $t_4 = 13$ तथा $t_7 = 113$ हो, तो दिखाइए कि $3t_n = 17n^2 - 87n + 115$ ।

5.3 समांतर श्रेणियाँ (Arithmetic Progressions अर्थात् A. P.)

आइए विषम प्राकृत संख्याओं के अनुक्रम

$$1, 3, 5, 7, 9, \ldots, 2n-1, \ldots \qquad (A)$$

अथवा, सम धनात्मक पूर्णांकों के अनुक्रम

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots, 2n, \ldots \qquad (B)$$

पर विचार करें ।

(A) में हम देखते हैं कि $t_1 = 1$, $t_2 = 3 = t_1 + 2$, $t_3 = 5 = t_2 + 2$, $t_4 = 7 = t_3 + 2$, इत्यादि । दूसरे शब्दों में, प्रथम के अतिरिक्त प्रत्येक पद एक 'निश्चित' ढंग से 'प्रगति' (progress) करता है ।

(B) में हम देखते हैं कि $t_1 = 2$, $t_2 = 4 = t_1 + 2$, $t_3 = 6 = t_2 + 2$, $t_4 = 8 = t_3 + 2$, इत्यादि । पुनः प्रथम के अतिरिक्त प्रत्येक पद एक निश्चित ढंग से 'प्रगति' करता है । हम देखते हैं कि प्रथम के अतिरिक्त कोई भी पद स्वयं से तुरन्त पिछले पद में एक निश्चित संख्या जोड़ने से प्राप्त होता है । इस प्रकार के अनुक्रम समांतर अनुक्रम (arithmetic sequences) अथवा समांतर श्रेणियाँ (arithmetic progressions) कहलाते हैं । संक्षिप्त रूप में इन्हें A. P. भी कहते हैं । दूसरे शब्दों में, समांतर अनुक्रम अथवा समांतर श्रेणी वह अनुक्रम है जिसका प्रथम के अतिरिक्त प्रत्येक पद स्वयं से तुरन्त पिछले पद में एक निश्चित संख्या जोड़ने से प्राप्त होता है । निश्चित संख्या सार्व अन्तर (common difference) कहलाती है तथा इसे प्रायः 'd' से व्यक्त किया जाता है । प्रथम पद को प्रायः a से व्यक्त किया जाता है । इस प्रकार, एक समांतर श्रेणी मे,

$t_n = t_{n-1} + d$, $(n > 1)$ होता है ।

(A) में $a = 1$ तथा $d = 2$ है । (B) में $a = 2$ तथा $d = 2$ है ।

समांतर श्रेणियों के कुछ अन्य उदाहरण निम्न हैं :

$16, 11, 6, 1, -4, -9, \ldots;\ a = 16,\ d = -5$

$-1, -4, -7, -10, -13, \ldots;\ a = -1,\ d = -3$

$x - 3b, x + b, x + 5b, x + 9b, \ldots;\ a = x - 3b,\ d = 4b$

5.4 समांतर श्रेणी का nवाँ अर्थात् व्यापक पद

आइए, एक समांतर श्रेणी जिसका प्रथम पद 'a' तथा सार्व अन्तर 'd' है पर विचार करें । इस श्रेणी के प्रथम कुछ पद क्या होंगे ? हम प्रथम पद में 'd' जोड़कर द्वितीय पद प्राप्त करते हैं । इस प्रकार, $t_2 = a + d$ । इसी प्रकार, t_2 में d जोड़ने से तृतीय पद प्राप्त हो जाता है । अतः $t_3 = t_2 + d$, अर्थात् $t_3 = a + 2d$ । हम इन्हें तथा कुछ अन्य पदों को नीचे लिखते हैं :

प्रथम पद, $t_1 = a = a + (1-1)\,d$

दूसरा पद, $t_2 = a+d = a + (2-1)\, d$

तीसरा पद, $t_3 = a+2d = a + (3-1)\, d$

चौथा पद, $t_4 = a+3d = a + (4-1)\, d$

पाँचवाँ पद, $t_5 = a+4d = a + (5-1)\, d$

क्या आप इसमें कोई प्रतिरूप देखते हैं ? हम देखते हैं कि प्रत्येक पद a + (पद संख्या -1) d है। उदाहरणार्थ, 16 वाँ पद क्या होगा ?

$$t_{16} = a + (16-1)\, d = a + 15d$$

क्या अब आप बता सकते हैं कि nवाँ पद अर्थात् व्यापक पद क्या होगा ? यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$t_n = a + (n-1)\, d$$

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : समांतर श्रेणी 16, 11, 6, 1, -4, -9, . . . का 18वाँ, 23वाँ तथा nवाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $a = 16$ तथा $d = -5$ है। इस प्रकार,

$$t_{18} = a + (18-1)\, d = 16 + 17\,(-5) = -69$$

$$t_{23} = a+22d = 16+22(-5) = -94$$

तथा $t_n = a+(n-1)d = 16-5(n-1) = 21-5n$

उदाहरण 2 : समांतर श्रेणी $x-3b, x+b, x+5b, x+9b, \ldots$ का व्यापक पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = x-3b$ तथा $d = 4b$ है।

इस प्रकार, $t_n = (x-3b)+(n-1)4b$

अर्थात्, $t_n = x+4\left(n-\dfrac{7}{4}\right)b$

उदाहरण 3 : एक समांतर श्रेणी का प्रथम पद -2 तथा दसवाँ पद 16 है। इसका 15वाँ पद निर्धारित कीजिए।

हल : किसी समांतर श्रेणी के व्यापक पद के सूत्र में दो अज्ञात 'a' तथा 'd' होते हैं। इस प्रश्न में हमें दो प्रतिबन्ध अर्थात्, $t_1 = -2$ तथा $t_{10} = 16$ दिए हुए हैं। इस प्रकार,

$$\left.\begin{aligned} t_1 &= a = -2 \\ t_{10} &= a+9d = 16 \end{aligned}\right\}$$

हम इनको युगपत् समीकरणों के रूप में हल करते हैं तथा निम्न प्राप्त करते हैं :

$$a = -2$$

तथा $$d = 2$$

अतः, $t_{15} = a+14d = -2+14(2) = 26$

प्रश्नावली 5.2

निम्न में से प्रत्येक समांतर श्रेणी का 'd' ज्ञात कीजिए तथा उसके अगले चार पद लिखिए :

1. $0, -3, -6, -9, \ldots$
2. $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$
3. $x+y, x-y, x-3y, \ldots$
4. $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \ldots$

निम्नलिखित समांतर श्रेणियों में से प्रत्येक के सामने लिखे पद ज्ञात कीजिए :

5. $a=3, d=2; t_{10}, t_n$
6. $a=\frac{1}{5}, d=\frac{2}{3}; t_{18}, t_n$
7. $-1, -2, -3, -4, \ldots ; t_{100}$
8. $n-1, n-2, n-3, \ldots ; t_m$
9. उस समांतर श्रेणी का 25वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका 9वाँ पद -6 तथा सार्व अंतर $\frac{5}{4}$ है।
10. एक समांतर श्रेणी के प्रत्येक पद को दुगुना कर दिया जाता है। क्या इस प्रकार प्राप्त अनुक्रम भी एक समांतर श्रेणी है ? यदि ऐसा है, तो इस श्रेणी का प्रथम पद, सार्व अंतर तथा nवाँ पद लिखिए।
11. यदि एक समांतर श्रेणी के 7वें पद का 7 गुना उसके 11वें पद के 11 गुने के बराबर है, तो दिखाइए कि उसका 18वाँ पद शून्य है।
12. यदि एक समांतर श्रेणी के mवें पद का m गुना उसके nवें पद के n गुने के बराबर हो, तो सिद्ध कीजिए कि उसका $(m+n)$वाँ पद शून्य है।
13. एक समांतर श्रेणी का दूसरा तथा r वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका छठा पद 12 तथा 8वाँ पद 22 है।
14. एक समांतर श्रेणी का तीसरा पद 'p' है तथा चौथा पद 'q' है। 10वाँ तथा व्यापक पद ज्ञात कीजिए।
15. समांतर श्रेणी $5, 2, -1, \ldots$ का कौन सा पद -22 है ?
16. k ज्ञात कीजिए ताकि $k+2, 4k-6$ और $3k-2$ किसी समांतर श्रेणी के तीन क्रमागत (consecutive) पद हों।

5.5 एक समांतर श्रेणी के n पदों का योग

महान जर्मन गणितज्ञ कार्ल फ्रेडरिक गौस जब प्राथमिक विद्यालय में थे तो उनके अध्यापक ने उनकी कक्षा से प्रथम 100 प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए कहा। जबकि कक्षा के शेष सभी विद्यार्थी इस समस्या के लिए संघर्ष कर रहे थे, गौस ने अति अल्प समय में इसका उत्तर प्राप्त कर लिया था। हम नीचे किसी समांतर श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात करने के लिए, गौस द्वारा प्रयोग की गई विधि के प्रकार की, एक विधि दे रहे हैं :

मान लीजिए कि समांतर श्रेणी का प्रथम पद 'a' तथा सार्व अंतर 'd' है। आइए इस श्रेणी के प्रथम n पदों के योग को S_n से व्यक्त करें। तब,

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \dots + [a + (n-2)\,d] + [a + (n-1)\,d] \quad (1)$$

इस योग को प्राप्त करने की एक 'युक्ति' यह है कि S_n को फिर से निम्न रूप से लिखें :

$$S_n = [a + (n-1)\,d] + [a + (n-2)\,d] + [a + (n-3)\,d] + \dots + (a+d) + a \quad (2)$$

अब हम (1) तथा (2) को एक-एक पद करके जोड़ते हैं। हम देखते हैं कि (1) के किसी भी पद तथा (2) में उसके तदनुरूपी पद का योग $2a + (n-1)\,d$ है। उदाहरणार्थ,

$$\begin{aligned}
a + [a + (n-1)\,d] &= 2a + (n-1)\,d \\
(a+d) + [a + (n-2)\,d] &= 2a + (n-1)\,d \\
(a+2d) + [a + (n-3)\,d] &= 2a + (n-1)\,d \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
[a + (n-2)\,d] + (a+d) &= 2a + (n-1)\,d \\
[a + (n-1)\,d] + a &= 2a + (n-1)\,d
\end{aligned}$$

हम $2a + (n-1)\,d$ कितनी बार प्राप्त करेंगे ? यह स्पष्ट है कि (1) तथा (2) में प्रत्येक S_n के n पद हैं। अतः हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$2\,S_n = n\,[2a + (n-1)\,d]$$

$$\text{अर्थात्, } S_n = \frac{n}{2}\left[\,2a + (n-1)d\,\right]$$

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : प्रथम 100 प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 1$, $d = 1$ तथा $n = 100$ है।

इस प्रकार,
$$S_{100} = \frac{100}{2}\left[\,2\,(1) + (100-1)\,1\,\right]$$
$$= 50\,(101) = 5050$$

उदाहरण 2 : प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

हल : यह उदाहरण 1 की तरह है।

इस प्रकार, $$S_n = \frac{n}{2}\left[2\,(1) + (n-1)\,1 \right]$$

$$= \frac{n}{2}(n+1)$$

यह कि प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग $\frac{n\,(n+1)}{2}$ है, एक महत्वपूर्ण परिणाम है और इसका गणित में बहुत उपयोग होता है।

[हम देखते हैं कि उदाहरण 1, उदाहरण 2 की वह विशेष अवस्था है जबकि $n = 100$ है।]

अमरीका के समर्पित गणितीय शिक्षाविद् पॉल रोसिनब्लूम ने कहा है कि 'विचारों के माध्यम में सुन्दरता की रचना करना गणित का उद्देश्य है।' गणित की समस्याओं को एक से अधिक विधियों से हल करने में सक्षम होना हर्ष का एक स्रोत है तथा अति आनन्ददायक है। हम नीचे प्रथम प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात करने की एक अन्य विधि दे रहे हैं :

$$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

आइए, सर्वसमिका $k^2-(k-1)^2=2k-1$ लें।

हम इसमें बारी-बारी से $k=1,2,3,\ldots,n$ प्रतिस्थापित करके निम्न प्राप्त करते हैं :

$$1^2-0^2=2\,(1)-1$$
$$2^2-1^2=2\,(2)-1$$
$$3^2-2^2=2\,(3)-1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^2-(n-1)^2=2\,(n)-1$$

जब हम जोड़ते हैं तो हम पदों के कटान (cancellation) में एक प्रतिरूप देखते हैं। क्या आप यह प्रतिरूप देख सकते हैं ? इनका योग क्या है ? हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$n^2-0^2=2\,(1+2+3+\ldots+n)-n$$

अर्थात्, $n^2=2\,(S_n)-n$

इस प्रकार, $S_n=\frac{n\,(n+1)}{2}$

[ध्यान दीजिए हम देखते हैं कि वाम पक्ष में हम केवल दो ही पद प्राप्त करते हैं—शेष सभी पद कट जाते हैं। अतः इस विधि को दूरदर्शीय (telescopic) योग की विधि कहा जाता है।]

कभी-कभी हमें किसी समांतर श्रेणी का केवल प्रथम पद तथा nवाँ पद ही दिया होता है। आपको याद होगा कि हमें समान्तर श्रेणी के दो अज्ञातों के मान ज्ञात करने के लिए केवल दो प्रतिबन्धों की ही आवश्यकता होती है। हम इस का योग कैसे ज्ञात करते हैं ? आइए, इसे अधिक सरल करने के लिए nवें पद को अंतिम पद (last term) कहें तथा इसे 'l' से व्यक्त करें।

अब, $S_n = a + (a+d) + (a+2d) + \ldots + (l-d) + l$

पहले की तरह हम निम्न प्राप्त करते है :

$$2\ S_n = n\ (a+l)$$

अर्थात्, $S_n = \frac{n}{2}\ (a + l)$

दूसरे शब्दों में, प्रथम n पदों का योग, प्रथम पद तथा अंतिम पद (अर्थात् nवें पद) के मध्यमान का n गुना है।

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : 1 तथा 100 के बीच उन सभी प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए जो 3 की गुणज हैं।

हल : यहाँ $a=3$, $d=3$ तथा $l=99$ है। (क्यों ?)

सर्वप्रथम हमें n ज्ञात करना चाहिए। हम देखते है कि

$$l=a+(n-1)\ d$$

अर्थात्, $3+3\ (n-1)=99$

इस प्रकार, $n=33$

तथा $S_{33}=\frac{33(3+99)}{2}=1683$

उदाहरण 4 : 715 योग प्राप्त करने के लिए समांतर श्रेणी 1, 4, 7, . . . के कितने पदों की आवश्यकता है ?

हल : यहाँ $a=1$, $d=3$ तथा $S_n=715$ है। हमें n निर्धारित करने की आवश्यकता है। हम S_n का सूत्र प्रयोग करके निम्न प्राप्त करते हैं :

$$715=\frac{n}{2}\left[2\ (1)+(n-1)\ 3\right]$$

अर्थात्, $3n^2-n-1430=0$

यह n में द्विघात समीकरण है। इसका विविक्तकर धनात्मक है। हम द्विघात सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं तथा निम्न प्राप्त करते हैं :

$$n=\frac{1\pm\sqrt{1+4\ (3)\ (1430)}}{6}=\frac{1\pm\sqrt{17161}}{6}$$

इस प्रकार, $n=\frac{1\pm131}{6}$ अर्थात् 22, $\frac{-65}{3}$

निश्चय ही पदों की संख्या $\frac{-65}{3}$ नहीं हो सकती (क्यों ?)। अतः वांछित पदों की संख्या 22 है।

उदाहरण 5 : एक समांतर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योग 36 तथा इनका गुणनफल 1620 है। वह श्रेणी ज्ञात कीजिए।

हल : गणित में समस्याएँ हल करने के लिए हम सदैव 'श्रेष्ठ' विधियाँ खोजते हैं। हम यह मान सकते हैं कि प्रथम तीन पद a, $a+d$ तथा $a+2d$ हैं। परन्तु इन संख्याओं का गुणनफल कुछ कठिन होगा तथा दिए गए दोनों प्रतिबन्धों को युगपत रूप से हल करने में अधिक समय लगेगा।

एक 'श्रेष्ठ' विधि यह है कि संख्याओं को $a-d$, a तथा $a+d$ मान लिया जाए। तब हमें तुरंत निम्न प्राप्त होता है :

$$36=(a-d)+a+(a+d)=3a \quad (1)$$

$$\text{तथा} \quad a(a^2-d^2)=1620 \quad (2)$$

(1) से, $a=12$

(2) से, $12^2-d^2=135$, अत: $d^2=9$

जिससे $d=\pm 3$

इस प्रकार हम निम्न दो समांतर श्रेणियाँ प्राप्त करते हैं :

$d=+3$: 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27,...

$d=-3$: 15, 12, 9, 6, 3, 0, −3,...

दोनों समांतर श्रेणियों में प्रथम तीन पद दिए हुए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करते हैं।

उदाहरण 6 : एक किसान 12000 रु० में एक पुराना ट्रैक्टर खरीदता है। वह 6000 रु० का नकद भुगतान करता है तथा शेष रकम को 500 रु० की वार्षिक किस्तों में देने का वादा करता है। साथ ही भुगतान न की गई राशि पर 12% की दर से ब्याज देता है। इस प्रकार उसे ट्रैक्टर का कुल कितना मूल्य देना पड़ेगा ?

हल : किसान 6000 रुपये नकद देता है। शेष 6000 रु० की राशि वह 500 रु० की वार्षिक किस्तों में अदा करता है तथा इसके अतिरिक्त भुगतान न की गई राशि पर ब्याज भी देता है। क्या आप बता सकते हैं कि उसे ऋण चुकाने में कितने वर्ष लगेंगे ? स्पष्ट है कि 12 वर्ष लगेंगे। पहले वर्ष के अन्त में उसे कितनी राशि देनी पड़ती है ? वह निम्न राशि अदा करता है :

$$500+\frac{6000\times 12}{100}$$ अर्थात् 1220 रुपये।

दूसरे वर्ष के अन्त में वह कितनी राशि देता है ? वह $500+\frac{5500\times 12}{100}$ अर्थात् 1160 रु० अदा करता है।

यह स्पष्ट है कि प्रत्येक वर्ष वह पिछले वर्ष से 60 रुपये कम अदा करता है जोकि उसके मूलधन के भाग 500 रु० पर ब्याज है। इस प्रकार हम एक समांतर श्रेणी प्राप्त करते हैं जिसमें $a=1220$, $d=-60$ तथा $n=12$ है।

$$\text{अत:}\ S_{12}=\frac{12}{2}\left[2(1220)+11(-60)\right]=10680$$

निस्संदेह, वह 6000 रु० नकद दे चुका है। अत: उसे ट्रैक्टर का कुल मूल्य 16680 रु० देना पड़ेगा।

प्रश्नावली 5.3

निम्न में से प्रत्येक समांतर श्रेणी के यथानुक्रम दिए हुए पदों का योग ज्ञात कीजिए :

1. 16, 11, 6, ...; 23 पद, n पद
2. $-0.5, -1.0, -1.5, \ldots$; 10 पद, 50 पद
3. $-2, 4, 10, \ldots$; 21 पद, 32 पद
4. $-1, \frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \ldots$; 81 पद
5. $x+y, x-y, x-3y, \ldots$; 22 पद, p पद
6. $1, 3, 5, 7, \ldots$; 100 पद, 200 पद
7. $2, 4, 6, 8, \ldots$; 100 पद, n पद
8. 100 तथा 1000 के बीच की उन सभी प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए जो 5 की गुणज हैं।
9. यदि $t_5=2$ तथा $t_7=22$ हो तो समांतर श्रेणी के प्रथम 35 पदों का योग निर्धारित कीजिए।
10. -25 योग प्राप्त करने के लिए समांतर श्रेणी $-6, -\frac{11}{2}, -5, \ldots$ के कितने पदों की आवश्यकता है ?

निम्न में से प्रत्येक श्रेणी में l, a, n, d तथा S_n में से जो नहीं हैं उनका निर्धारण कीजिए :

11. $a=-2, d=5, S_n=568$
12. $a=\frac{17}{2}, d=\frac{3}{2}, n=6$
13. $l=8, n=8, S_8=-20$
14. $d=\frac{2}{3}, l=10, n=20$
15. $a=-3030, l=-1530, n=51$
16. एक समांतर श्रेणी में $a=2$ है तथा प्रथम पाँच पदों का योग अगले पाँच पदों के योग का एक-चौथाई है। सिद्ध कीजिए कि $t_{20}=-112$ है।
[संकेत : एक समांतर श्रेणी $a, a+d, a+2d, \ldots$ पर विचार कीजिए।
तब $S_5=\frac{5}{2}[a+(a+4d)]$ अगले पाँच पदों में प्रथम पद $a+5d$ तथा अन्तिम पद $a+9d$ होगा, इत्यादि।]

*17. एक समांतर श्रेणी, जिसके प्रथम n पदों का योग $2n+3n^2$ है, का r वाँ पद ज्ञात कीजिए।
[संकेत : $t_r=S_r-S_{r-1}$]

*18. 3 अंकों की उन सभी संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए जिन्हें यदि 4 से विभाजित किया जाए तो 1 शेष बचे।

19. हरि एक मकान 22000 रु० में खरीदता है। वह 4000 रु० नकद तथा शेष रकम 1000 रु० की वार्षिक किस्तों में अदा करता है तथा भुगतान न की गई राशि पर 10% वार्षिक ब्याज भी देता है। इस प्रकार उसे मकान का कुल कितना मूल्य देना पड़ेगा ?

5.6 गुणोत्तर श्रेणियाँ (Geometric Progressions अर्थात् G.P.)

आइए निम्नलिखित अनुक्रमों पर विचार करें :

$2, 4, 8, 16, \ldots, 2^n, \ldots$ (A)

$-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots, \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \ldots$ (B)

$.01, .0001, .000001, \ldots, (.01)^n, \ldots$ (C)

$-\frac{9}{2}, \frac{9}{4}, -\frac{9}{8}, \frac{9}{16}, \ldots, 9\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \ldots$ (D)

हम देखते हैं कि इन सभी अनुक्रमों में प्रथम पद के अतिरिक्त प्रत्येक पद एक 'निश्चित' प्रकार से 'प्रगति' करता है। ये पद कैसे 'प्रगति' करते हैं ?

(A) में हम देखते हैं कि $t_1=2$, $t_2=4=2t_1$, $t_3=8=2t_2$, $t_4=16=2t_3$, इत्यादि।

(B) में हम देखते हैं कि $t_1=-\frac{1}{3}$, $t_2=\frac{1}{9}=-\frac{1}{3}t_1$, $t_3=-\frac{1}{27}=-\frac{1}{3}t_2$,

$t_4=\frac{1}{81}=-\frac{1}{3}t_3$, इत्यादि।

(C) में पद किस प्रकार प्रगति करते हैं ? D में किस प्रकार करते हैं ?

हम देखते हैं कि प्रथम के अतिरिक्त प्रत्येक पद अपने से तुरन्त पिछले पद को एक शून्येतर स्थिर संख्या से गुणा करने पर प्राप्त होता है। ऐसे अनुक्रम गुणोत्तर अनुक्रम (geometric sequences) अथवा गुणोत्तर श्रेणियाँ (geometric progressions) या संक्षेप में G. P. कहलाते हैं। दूसरे शब्दों में, गुणोत्तर अनुक्रम अथवा गुणोत्तर श्रेणी वह अनुक्रम होता है जिसका प्रथम के अतिरिक्त प्रत्येक पद उससे तुरन्त पिछले पद को एक शून्येतर स्थिर संख्या से गुणा करके प्राप्त होता है। स्थिर संख्या सार्व अनुपात (common ratio) कहलाती है तथा इसे प्राय. 'r' से व्यक्त किया जाता है। प्रथम पद को प्राय: 'b' से व्यक्त किया जाता है। यदि $b \neq 0$ है तो गुणोत्तर श्रेणी में कोई भी पद शून्य नहीं होगा।

इस प्रकार, एक गुणोत्तर श्रेणी में,

$$t_n = r t_{n-1}, (r \neq 0)$$

अर्थात्, $\frac{t_n}{t_{n-1}} = r$ (स्थिर)

(A) में हम देखते हैं कि $b=2$ तथा $r=2$ है। (B) में, $b=-\frac{1}{3}$ तथा $r=-\frac{1}{3}$ है। (C) में, $b=.01$ तथा $r=.01$ है। (D) में, $b=-\frac{9}{2}$ तथा $r=-\frac{1}{2}$ है।

5.7 एक गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद अर्थात् व्यापक पद

आइए एक गुणोत्तर श्रेणी लें जिसका प्रथम पद 'b' तथा सार्व अनुपात 'r' है। इसके प्रथम कुछ पद क्या होंगे ? दूसरा पद b को r से गुणा करके प्राप्त होता है। अत: $t_2=br$। इसी प्रकार तीसरा पद t_2 को r से गुणा करके प्राप्त होता है। अत: $t_3=rt_2=br^2$।

हम इन्हें तथा कुछ अन्य पदों को नीचे दे रहे हैं :

पहला पद, $t_1=b \qquad =br^{1-1}$

दूसरा पद, $t_2=br \qquad =br^{2-1}$

तीसरा पद, $t_3=br^2 \qquad =br^{3-1}$

चौथा पद, $t_4=br^3 \qquad =br^{4-1}$

पाँचवाँ पद, $t_5=br^4 \qquad =br^{5-1}$

क्या आप कोई प्रतिरूप देखते हैं? हम देखते हैं कि प्रत्येक पद b × r की [illegible] है।
उदाहरणार्थ, 16वाँ पद क्या होगा ?

$$t_{16}=b\times r^{16-1}=br^{15}$$

क्या अब आप कह सकते हैं कि nवाँ पद अर्थात् व्यापक पद क्या होगा ? यह सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\mathbf{t_n=br^{n-1}}$$

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : गुणोत्तर श्रेणी $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$ का 10वाँ तथा n वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $b=\frac{3}{2}$ तथा $r=\frac{1}{2}$ है।

इस प्रकार, $\quad t_{10}=br^{10-1}=br^9=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^9=\frac{3}{1024}$

तथा $\quad t_n=br^{n-1}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{3}{2^n}$

उदाहरण 2 : उन गुणोत्तर श्रेणियों के प्रथम 4 पद ज्ञात कीजिए जिनके nवें पद निम्न हैं :

(i) $t_n=3(-2)^{n-1}$ (ii) $t_n=x^n, (x\neq 0)$

हल : **(i)** $t_n=3(-2)^{n-1}$

इस प्रकार, $\quad t_1=3(-2)^0=3,\ t_2=3(-2)=-6,$

$t_3=3(-2)^2=12$ तथा $t_4=3(-2)^3=-24$

अत: प्रथम 4 पद 3, −6, 12 तथा −24 हैं।

(ii) $t_n=x^n, (x\neq 0)$

$n = 1, 2, 3$ तथा 4 प्रतिस्थापित करके हमें क्रमशः निम्न प्रथम 4 पद प्राप्त होते हैं :

x, x^2, x^3 तथा x^4

उदाहरण 3 : गुणोत्तर श्रेणी $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots$ का कौन सा पद 64 है ?

हल : यहाँ $b = 2$ तथा $r = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ है।

अब, $t_n = 2(\sqrt{2})^{n-1}$

हमें ऐसा n ज्ञात करना है कि $t_n = 64$ अर्थात् $2(\sqrt{2})^{n-1} = 64$ हो।

इस प्रकार, $(\sqrt{2})^{n-1} = 32$

अर्थात्, $2^{\frac{n-1}{2}} = 2^5$

अथवा, $\dfrac{n-1}{2} = 5$

अतः, $n = 11$

इस [illegible] दी हुई श्रेणी का 11वाँ पद है।

[illegible] एक गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद 50 तथा चौथा पद 1350 है। उसका 5 वाँ पद ज्ञात कीजिए :

हल : यहाँ $b = 50$ तथा $t_4 = 1350$ है। हमें r को निर्धारित करने की आवश्यकता है।

अब, $t_4 = 50r^3 = 1350$

इस प्रकार, $r^3 = 27$

अर्थात्, $r = 3$

अतः, $t_5 = 50(3)^4 = 4050$

प्रश्नावली 5.4

निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेणियों में से प्रत्येक का 'r' ज्ञात कीजिए तथा प्रत्येक के अगले चार पद लिखिए :

1. $-3, 1, -\frac{1}{3}, \ldots$
2. $-\frac{2}{3}, -6, -54, \ldots$
3. $5, 0.5, 0.05, \ldots$

4. $\sqrt{3}, \sqrt{6}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}, \ldots$

5. $\frac{x}{y}, \frac{1}{x}, \frac{y}{x^3}, \ldots$

निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेणियों में प्रत्येक के सम्मुख दिए पद ज्ञात कीजिए :

6. $b=1,\ r=1.2\ ;\ t_4,\ t_n$

7. $128, -96, 72, \ldots\ ;\ t_{11},\ t_n$

8. $100, -110, 121, \ldots\ ;\ t_n$

9. उस गुणोत्तर श्रेणी का 12वाँ पद निर्धारित कीजिए जिसका 8वाँ पद 192 तथा सार्व अनुपात 2 है।

10. एक गुणोत्तर श्रेणी के 5वें, 8वें तथा 11वें पद क्रमशः p, q तथा s हैं। दिखाइए कि $q^2=ps$ ।

11. एक गुणोत्तर श्रेणी का चौथा पद उसके दूसरे पद का वर्ग है; तथा उसका प्रथम पद -3 है। उसका 7वाँ पद निर्धारित कीजिए।

12. एक गुणोत्तर श्रेणी, जिसका प्रथम पद 'b' तथा सार्व अनुपात 'r' है, के सभी पदों का वर्ग किया जाता है। क्या इस प्रकार से प्राप्त अनुक्रम भी एक गुणोत्तर श्रेणी है ? यदि ऐसा है, तो इसका प्रथम पद, सार्व अनुपात तथा nवाँ पद ज्ञात कीजिए।

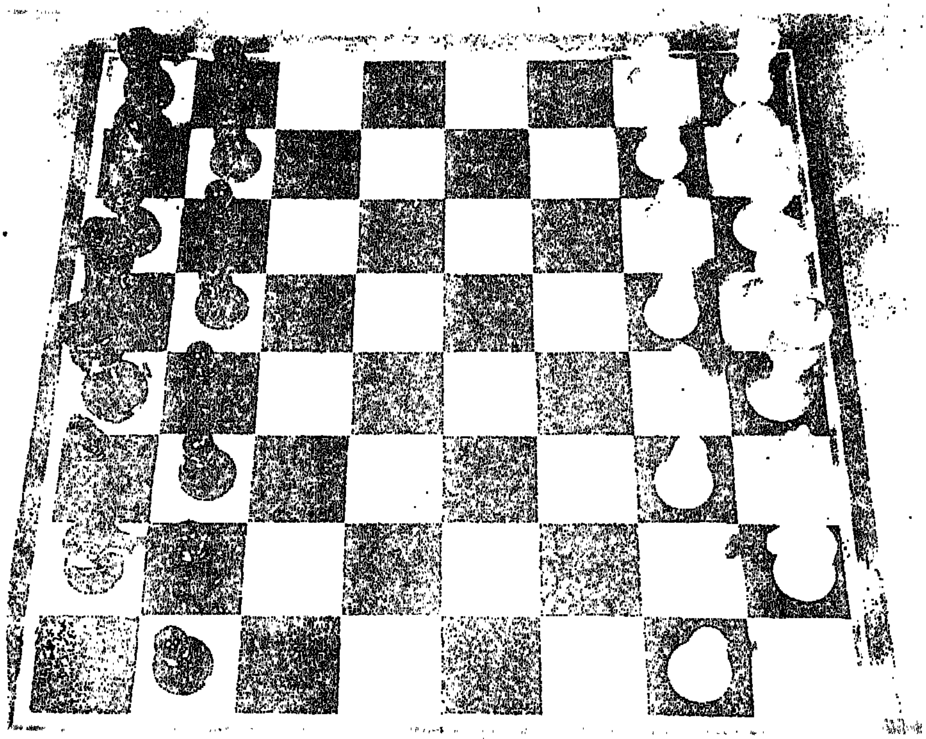
13. x का (के) मान ज्ञात कीजिए ताकि $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ एक गुणोत्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पद हों।

14. दो गुणोत्तर श्रेणियाँ दी हुई हैं जिनमें से एक श्रेणी का प्रथम पद 'b' तथा सार्व अनुपात 'r' है तथा दूसरी श्रेणी का प्रथम पद 'c' तथा सार्व अनुपात 's' है। दिखाइए कि दोनों श्रेणियों के तदनुरूपी पदों के गुणनफल से प्राप्त अनुक्रम भी एक गुणोत्तर श्रेणी है। इस प्रकार प्राप्त श्रेणी का प्रथम पद तथा सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए। यह भी दिखाइए कि, जब $c \neq 0$, तो दोनों श्रेणियों के तदनुरूपी पदों के भागफल से प्राप्त अनुक्रम भी एक गुणोत्तर श्रेणी है। उसका प्रथम पद तथा सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

15. किसी संवर्धन (culture) में जीवाणुओं की संख्या प्रत्येक घंटे में पहले से दुगुनी हो जाती है। यदि संवर्धन में प्रारम्भ में जीवाणुओं की संख्या 30 हो, तो दूसरे घंटे के अन्त में जीवाणुओं की संख्या क्या होगी ? चौथे तथा n वें घंटे के अन्त में जीवाणुओं की संख्याएँ क्या-क्या होंगी ?

5.8 एक गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योग

शतरंज (chess) के खेल के आविष्कारक के विषय में एक अति रुचिपूर्ण कहानी है। क्या आपने शतरंज का बोर्ड देखा है ?



आकृति 5.2 : शतरंज का बोर्ड

आविष्कारक से फारस (Persia) का राजा इतना प्रसन्न हुआ कि उसने आविष्कारक को मुँह माँगा इनाम देना चाहा। आविष्कारक ने इच्छा व्यक्त की कि शतरंज के बोर्ड के पहले वर्ग में गेहूँ का एक दाना रख दिया जाए, दूसरे वर्ग में दो दाने तथा तीसरे में चार दानें, इत्यादि। आविष्कारक ने कुल मिलाकर गेहूँ के कितने दाने माँगे थे ? स्पष्ट है कि 64 वें वर्ग में 2^{63} दानों की आवश्यकता होगी। जैसा कि हम देखेंगे कि यद्यपि आविष्कारक की माँग अति अल्प प्रतीत होती है परन्तु वस्तुतः ऐसा है नहीं।

आइए अब यह सीखें कि एक गुणोत्तर श्रेणी, जिसका प्रथम पद 'b' तथा सार्व अनुपात 'r' है, के प्रथम n पदों का योग किस प्रकार ज्ञात करते हैं। यदि हम n पदों के योग को S_n से व्यक्त करें, तो

$$S_n = b + br + br^2 + \dots + br^{n-2} + br^{n-1} \qquad (1)$$

आइए (1) के दोनों पक्षों को r से गुणा करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$r\,S_n = br + br^2 + \dots + br^{n-2} + br^{n-1} + br^n \qquad (2)$$

ध्यान दीजिए कि हमने (2) में गुणनफल के दक्षिण पक्ष को इस प्रकार लिखा है कि इसका प्रथम पद (1) के दक्षिण पक्ष के दूसरे पद के ठीक नीचे आए; इसका दूसरा पद (1) के दक्षिण पक्ष के तीसरे पद के ठीक

नीचे आए, इत्यादि। हम ऐसा क्यों करते हैं ? यह स्पष्ट है कि जब हम $r\,S_n$ को S_n में से घटाते हैं तो समान पद आपस में कट जाएँगे। इस प्रकार,

$$S_n - r\,S_n = b - br^n$$

अर्थात्, $S_n\,(1-r) = b - br^n$

अब, यदि $r \neq 1$, तो $S_n = \dfrac{b(1-r^n)}{1-r}$

इस प्रकार, **किसी गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग**

$$\mathbf{S_n = \frac{b\,(1-r^n)}{1-r}\,,\ r \neq 1} \text{ है।}$$

स्पष्ट है कि **जब $r = 1$, तो $S_n = nb$ होता है।**

आइए अब देखें कि आविष्कारक ने गेहूँ के कितने दाने माँगे थे ? स्पष्ट है कि $b = 1, r = 2$ तथा $n = 64$। इस प्रकार,

$$S_{64} = \frac{1(2^{64}-1)}{2-1} = 2^{64}-1$$

क्या आपको मालूम है कि यह संख्या कितनी बड़ी है ? यह कहा जाता है कि आविष्कारक ने जितना गेहूँ माँगा था उससे पूरे फारस देश को 7 सेंटी मीटर से भी अधिक गहरी गेहूँ की परत से ढका जा सकता था। आधुनिक भारत के लिए यह परत लगभग 4 से० मी० गहरी होती। यह कहने की आवश्यकता नहीं है कि जब राजा को यह अनुभव हुआ कि आविष्कारक की माँग पूरी करना असम्भव है तो वह बहुत खिन्न हुआ। हम इस पर विचार करना नहीं चाहेंगे कि राजा ने आविष्कारक को इनाम दिया या नहीं।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : गुणोत्तर श्रेणी 128, — 96, 72, ... के प्रथम 11 पदों तथा प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $b = 128,\ r = \dfrac{-96}{128} = -\dfrac{3}{4}$ है।

क्योंकि $r \neq 1$ है, अतः हम योग के सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$S_{11} = \frac{128\left[1-\left(\frac{-3}{4}\right)^{11}\right]}{1-\left(\frac{-3}{4}\right)} = 128\left[1+\frac{3^{11}}{4^{11}}\right]\times\frac{4}{7}$$

अर्थात्, $$S_{11} = \frac{2(4^{11}+3^{11})}{7\times 4^7} = \frac{4^{11}+3^{11}}{7\times 2^{18}}$$

तथा, $$S_n = \frac{128\left[1-\left(\frac{-3}{4}\right)^n\right]}{1-\left(\frac{-3}{4}\right)} = \frac{2[\,4^n - (-1)^n 3^n]}{7(4^n-4)}$$

अर्थात्, $S_n = \frac{4^n-(-1)^n 3^n}{7 \times 2^{3n-9}}$

उदाहरण 2 : गुणोत्तर श्रेणी $1, a, a^2, a^3, \ldots;\ a \neq 1$ के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $b=1$ तथा $r=a \neq 1$ है।

इस प्रकार, $S_n = \frac{1(1-a^n)}{1-a}$

अर्थात्, $S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$

उदाहरण 3 : एक गुणोत्तर श्रेणी में $b=1$ तथा $r=\sqrt{2}$ है। S_{20} ज्ञात कीजिए।

हल : $S_{20} = \frac{1[1-(\sqrt{2})^{20}]}{1-\sqrt{2}} = \frac{2^{10}-1}{\sqrt{2}-1}$

आइए, हर का परिमेयकरण (rationalization) करें। हम अंश तथा हर को $\sqrt{2}+1$ से गुणा करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$S_{20} = \frac{(2^{10}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

अर्थात्, $S_{20} = 1023\ (\sqrt{2}+1)$

उदाहरण 4 : गुणोत्तर श्रेणी $3, 3^2, 3^3, \ldots$ के कितने पदों की आवश्यकता होगी ताकि योग 120 प्राप्त हो ?

हल : यहाँ, $b=3,\ r=3$ तथा $S_n=120$ है। हमें n निर्धारित करना है।

अब, $\frac{3(1-3^n)}{1-3} = 120$

इस प्रकार, $1-3^n = -80$

अर्थात्, $3^n = 81 = 3^4$

अतः, $n=4$

इस प्रकार, पदों की वांछित संख्या 4 है।

उदाहरण 5 : एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योग $\frac{39}{10}$ है तथा उनका गुणनफल 1 है। प्रथम पद, सार्व अनुपात तथा तीनों पद ज्ञात कीजिए।

हल : एक 'सुन्दर' विधि यह है कि प्रथम तीन पदों को $\frac{b}{r}$, b तथा br मान लिया जाए (क्यों ?)।

तब, $\frac{b}{r} + b + br = \frac{39}{10}$ (1)

तथा, $\left(\frac{b}{r}\right)(b)(br) = 1$ (2)

(2) से हमें तुरंत $b^3=1$ अर्थात्* $b=1$ प्राप्त होता है।

---

*हम $b^3-1=0$ का केवल वास्तविक मूल ही ले रहे हैं।

(1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$\frac{1}{r}+1+r=\frac{39}{10}$$

अर्थात्, $10r^2-29r+10=0$

यह r में एक द्विघात समीकरण है। इस प्रकार,

$$r=\frac{29\pm\sqrt{841-4(10)(10)}}{20}=\frac{29\pm 21}{20}$$

अर्थात्, $r=\frac{5}{2}$ तथा $\frac{2}{5}$

अत: हमें निम्न दो गुणोत्तर श्रेणियाँ प्राप्त होती हैं :

$$r=\frac{5}{2}:\quad \frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}, \frac{25}{4}, \ldots$$

$$r=\frac{2}{5}:\quad \frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}, \frac{4}{25}, \ldots$$

दोनों गुणोत्तर श्रेणियों के प्रथम तीन पद दिए हुए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करते हैं।

उदाहरण 6 : निम्नलिखित अनुक्रम का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए :

$$9, 99, 999, 9999, \ldots, \underbrace{99\ldots9}_{(n \text{ बार } 9)}, \ldots$$

हल : यह पूर्णतया एक गुणोत्तर श्रेणी नहीं है। परन्तु हम इसे निम्न प्रकार से लिखकर एक गुणोत्तर श्रेणी से सम्बद्ध कर सकते हैं :

$$10-1, 10^2-1, 10^3-1, 10^4-1, \ldots, 10^n-1, \ldots$$

यदि S_n, n पदों के योग को व्यक्त करता है, तो

$$S_n=10+10^2+\ldots+10^n-n$$

$$=\frac{10(1-10^n)}{1-10}-n$$

अर्थात्, $S_n=\frac{10}{9}(10^n-1)-n$

प्रश्नावली 5.5

निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेणियों में से प्रत्येक के सम्मुख दिए पदों का योग ज्ञात कीजिए ;

1. $1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \ldots$; 10 पद, n पद

2. .15, .015, .0015,...; 8 पद, 20 पद

3. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots$; n पद

4. $1, -a, a^2, -a^3, \ldots$; n पद $(a \neq 1)$

5. $x^3, x^5, x^7 \ldots$; n पद $(x \neq \pm 1)$

6. $2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \ldots$; 12 पद, n पद

7. $\sum_{k=1}^{11} (2+3^k)$ का मान ज्ञात कीजिए।

निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

8. $\sum_{j=1}^{6} 4\left(\frac{1}{3}\right)^{j-1}$

9. $\sum_{i=5}^{11} 4^i$

10. $\sum_{i=1}^{18} (2^i + 3^{i-1})$

11. एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योग $\frac{13}{12}$ तथा उनका गुणनफल -1 है। गुणोत्तर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

12. गुणोत्तर श्रेणी $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ के कितने पदों की आवश्यकता होगी ताकि योग $\frac{3069}{512}$ प्राप्त हो?

13. एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योग 16 है तथा अगले तीन पदों का योग 128 है। गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद, सार्व अनुपात तथा प्रथम n पदों का योग निर्धारित कीजिए।

14. एक व्यक्ति अपने चार मित्रों को एक पत्र लिखता है। वह प्रत्येक को यह कहता है कि वह इस पत्र की प्रतिलिपि अपने चार मित्रों को इस निर्देश के साथ भेजें कि वे भी इस श्रृंखला को इसी प्रकार दोहराएँ। यह मानते हुए कि यह श्रृंखला नहीं टूटती तथा एक पत्र को भेजने का डाक खर्च 25 पैसे है, पत्रों के आठवें समुच्चय को भेजे जाने तक कुल डाक व्यय निर्धारित कीजिए।

15. एक गुणोत्तर श्रेणी दी हुई है जिसमें $b=729$ तथा सातवाँ पद 64 है। S_7 ज्ञात कीजिए।

*16. निम्न अनुक्रम के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए :

$$7, 77, 777, \ldots, \underbrace{77\ldots7}_{(n \text{ बार } 7)}, \ldots$$

17. अनुक्रम $1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n+1}, \ldots$ के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

5.9 अपरिमित गुणोत्तर श्रेणियाँ (Infinite Geometric Progressions)

आइए गुणोत्तर श्रेणी 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{9}$, ... पर विचार करें।

हम पहले ही प्रश्नावली 5.5 के प्रश्न 1 में इस श्रेणी का n पदों तक योग ज्ञात कर चुके हैं। आपको याद होगा कि

$$S_n = 3\left[1-\left(\tfrac{2}{3}\right)^n\right] = 3-3\left(\tfrac{2}{3}\right)^n$$

यदि पदों की संख्या बहुत बड़ी हो जाए तो क्या होगा ? आइए $(\frac{2}{3})^n$ के आचरण का अध्ययन करें जबकि n का मान बड़ा होता जाता है।

n	1	5	10	20	40
$(\frac{2}{3})^n$	.6667	.1316872428	.01734152992	.00030072866	.0000009043772695

हम देखते हैं कि जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, $(\frac{2}{3})^n$ शून्य के निकट पहुँचता जाता है। गणित की भाषा में हम यह कहते हैं कि जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, $(\frac{2}{3})^n$ शून्य की ओर अग्रसर (approaches) होता रहता है। [पाठक ध्यान दें कि $(\frac{2}{3})^n$ शून्य की ओर अग्रसर होता है, परन्तु यह कभी भी शून्य के बराबर नहीं होता।] हम पुनः यह कहते हैं कि S_n, 3 की ओर अग्रसर होता है। इसे हम निम्न प्रकार लिखते हैं :

जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, $(\frac{2}{3})^n \to 0$ तथा $S_n \to 3$। कभी-कभी हम यहाँ तक भी कह देते हैं कि इस गुणोत्तर श्रेणी के असंख्य पदों का (या श्रेणी का अनंत तक) योग 3 है।

आइए, एक अन्य उदाहरण लें। हम गुणोत्तर श्रेणी $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, ... पर विचार करते हैं। इस श्रेणी के प्रथम n पदों का योग $S_n = 1-(\frac{1}{2})^n$ है।

पुनः, आइए $(\frac{1}{2})^n$ के आचरण का अध्ययन करें जबकि n बड़ा होता जाता है।

n	1	5	10	20
$(\frac{1}{2})^n$	.5	.03125	.0009765625	.00000095367431640625

हम देखते हैं कि जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, $(\frac{1}{2})^n$ शून्य के निकट आता जाता है। वास्तव में यह $(\frac{2}{3})^n$ की अपेक्षा तीव्र गति से शून्य की ओर अग्रसर होता है। इस प्रकार, जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, $(\frac{1}{2})^n \to 0$ तथा $S_n \to 1$।

इन दोनों उदाहरणों में हमने देखा कि $r<1$ है । वास्तव में यह सिद्ध* किया जा सकता है कि यदि $|r|<1$, तो जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, $r^n \to 0$ ।

आइए अब देखें कि ऐसी स्थितियों में S_n का क्या होता है । एक गुणोत्तर श्रेणी के लिए, जिसका प्रथम पद 'b' तथा सार्व अनुपात 'r' है, हमें निम्न ज्ञात है :

$$S_n = \frac{b(1-r^n)}{1-r} = \frac{b}{1-r} - \frac{br^n}{1-r} \qquad (1)$$

क्योंकि $|r|<1$, $r^n \to 0$ । इस प्रकार, $\frac{br^n}{1-r} \to 0$ ।

अतः $S_n \to \frac{b}{1-r}$

दूसरे शब्दों में, एक गुणोत्तर श्रेणी, जिसका प्रथम पद 'b' तथा सार्व अनुपात 'r' ($|r|<1$) है, के असंख्य पदों का योग $\frac{b}{1-r}$ होता है ।

हम इसे इस प्रकार लिखते हैं :

$$S_\infty \text{ अथवा } S = \frac{b}{1-r}$$

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं ।

उदाहरण 1 : अपरिमित गुणोत्तर श्रेणी 5, $\frac{20}{7}$, $\frac{80}{49}$, ... का योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $b=5$ तथा $r=\frac{4}{7}$ है । साथ ही, $|r|<1$ है ।

$$\text{इस प्रकार } S = \frac{5}{1-\frac{4}{7}} = \frac{35}{3}$$

उदाहरण 2 : गुणोत्तर श्रेणी $\frac{-3}{4}$, $\frac{3}{16}$, $\frac{-3}{64}$, ... के लिए S ज्ञात कीजिए ।

हल : यहाँ $b=\frac{-3}{4}$ तथा $r=-\frac{1}{4}$ है । साथ ही, $|r|<1$ है।

---

* यदि $r=0$ हो, तो सभी n के लिए $r^n=0$ ।

यदि $0<|r|<1$, तो $\frac{1}{|r|}>1$ तथा $\frac{1}{|r|}$ को $1+s$ के रूप में लिखा जा सकता है जबकि $s>0$ ।

अब आपको याद होगा कि $(1+s)^n \geqslant 1+ns$

इस प्रकार, $|r|^n < \frac{1}{1+ns} \leqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{s}\right)$

जिससे, जब $n \to \infty$, $r^n \to 0$

इस प्रकार, $S=\dfrac{-\frac{3}{4}}{1-(-\frac{1}{4})}=-\frac{3}{5}$

अब हम एक गुणोत्तर श्रेणी, जिसमें $|r|<1$ है, के असंख्य पदों के योग का एक सुन्दर अनुप्रयोग (application) देते हैं। क्या आपको याद है कि एकक I में हमने सीखा था कि एक परिमेय संख्या को, जिसका प्रसार एक असांत आवर्ती दशमलव हो, किस प्रकार ज्ञात किया जाता है ? ऐसी परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए हम एक अपरिमित गुणोत्तर श्रेणी के योग का प्रयोग करेंगे। उदाहरणार्थ, संख्या 0.333... पर विचार कीजिए। [अनुच्छेद 1.5 का उदाहरण 1 भी देखिए।] इस दशमलव को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$0.333\ldots = 0.3+0.03+0.003+\ldots \qquad (3)$$

निस्संदेह (3) में दक्षिण पक्ष एक अपरिमित गुणोत्तर श्रेणी के योग को प्रदर्शित करता है जिसमें $b=0.3$ तथा $r=0.1$ ($|r|<1$) है। इसका योग क्या होगा ? यह योग $\dfrac{0.3}{1-0.1}$ अर्थात् $\frac{1}{3}$ है।

इस प्रकार, $\frac{1}{3}$ वह परिमेय संख्या है जिसे यदि दशमलव के रूप में व्यक्त किया जाए तो प्रसार $0.\bar{3}$ प्राप्त होगा।

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए जिसे यदि दशमलव के रूप में व्यक्त किया जाए तो प्रसार $0.23\bar{4}$ प्राप्त हो। [अनुच्छेद 1.5 का उदाहरण 2 भी देखिए।]

हल : हम इस प्रकार लिखते हैं :

$$0.23\bar{4}=0.23+0.004+0.0004+\ldots$$

$$=0.23+\frac{0.004}{1-0.1}=0.23+\frac{4}{900}$$

$$=\frac{211}{900}$$

अत:, $\dfrac{211}{900}$ अभीष्ट परिमेय संख्या है।

उदाहरण 4 : वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए जिसे यदि दशमलव में व्यक्त किया जाए तो प्रसार $1.\overline{56}$ प्राप्त हो।

हल : हम इसे इस प्रकार लिखते हैं :

$$1.\overline{56}=1+0.56+0.0056+\ldots$$

$$=1+\frac{0.56}{1-0.01}=1+\frac{56}{99}$$

$$=\frac{155}{99}$$

इस प्रकार, $\dfrac{155}{99}$ वांछित परिमेय संख्या है।

यदि $|r|>1$ हो, तो S_n क्या होगा ? स्पष्ट है कि यदि $|r|>1$, तो जैसे-जैसे n बड़ा होता जाता है, वैसे-वैसे $|r^n|$ बड़ा होता जाता है। **इस स्थिति में हम कहते हैं कि गुणोत्तर श्रेणी के असंख्य पदों के योग का अस्तित्व नहीं है।**

प्रश्नावली 5.6

निम्नलिखित गुणोत्तर श्रेणियों में से प्रत्येक में r का निर्धारण कीजिए। जाँच कीजिए कि $|r| < 1$ है। S_∞ अथवा S भी ज्ञात कीजिए।

1. $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$
2. $7, -1, \frac{1}{7}, -\frac{1}{49}, \ldots$
3. $6, 1.2, .24, \ldots$
4. $50, 42.5, 36.125, \ldots$
5. $0.3, 0.18, 0.108, \ldots$
6. $10, -9, 8.1, \ldots$

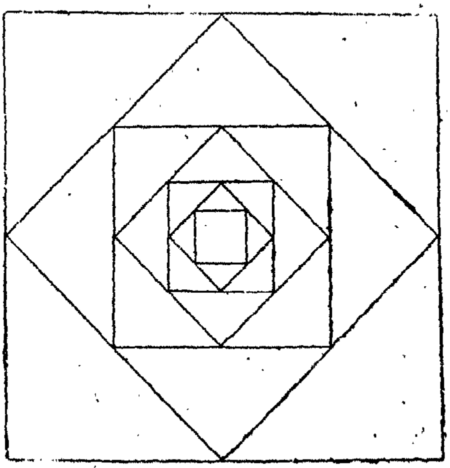
निम्नलिखित दशमलवों में से प्रत्येक के लिए एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए जिसका प्रसार वह दशमलव हो :

7. $0.6\overline{8}$
8. $1.\overline{15}$
9. $0.\overline{712}$

*10. $22.378\overline{2378}$

11. $0.\overline{10}$
12. एक गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद 2 है तथा असंख्य पदों तक इसका योग 6 है। सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।
13. एक गुणोत्तर श्रेणी का सार्व अनुपात $-\frac{4}{5}$ है तथा इसका असंख्य पदों तक योग $\frac{80}{9}$ है। प्रथम पद ज्ञात कीजिए।

*14. एक दिए हुए वर्ग की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाकर एक अन्य वर्ग खींचा गया है। इसी प्रकार एक तीसरा वर्ग दूसरे वर्ग के अन्तर्गत खींचा गया है तथा यही प्रक्रिया असंख्य बार दोहराई गई है। (देखिए आकृति 5.3) यदि पहले वर्ग की एक भुजा 16 सें० मी० हो, तो सभी वर्गों के क्षेत्रफलों का योग निर्धारित कीजिए।



आकृति 5.3

5.10 वर्गों तथा घनों के अनुक्रम

अब हम दो अन्य अनुक्रमों—प्राकृत संख्याओं के वर्गों तथा घनों के अनुक्रमों पर विचार करेंगे। इनका योग प्राप्त करना गणित की सुन्दरता का एक सुखद अनुभव है। आइए पहले प्राकृत संख्याओं के **वर्गों के अनुक्रम** अर्थात् $1^2, 2^2, 3^2, \ldots, n^2, \ldots$ पर विचार करें। हम इस अनुक्रम के n पदों का योग अर्थात् S_n कैसे ज्ञात करेंगे ? आइए दूरदर्शीय योगों की विधि का प्रयोग करें जैसा हमने प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग प्राप्त करने की स्थिति में किया था। हम किस सर्वसमिका से आरम्भ करें ? क्या आप अनुमान लगा सकते हैं ?

हम सर्वसमिका $k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1$ पर विचार करते हैं।

बारी-बारी से $k=1, 2, 3, \ldots, n$ प्रतिस्थापित करके हम निम्न प्राप्त करते हैं:

$$1^3-0^3=3(1)^2-3(1)+1$$
$$2^3-1^3=3(2)^2-3(2)+1$$
$$3^3-2^3=3(3)^2-3(3)+1$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$n^3-(n-1)^3=3(n)^2-3(n)+1$$

जोड़ने पर, $n^3-0^3=3S_n-3(1+2+\ldots+n)+n$ (1)

परन्तु $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$3S_n=n^3+\frac{3n(n+1)}{2}-n=\frac{2n^3+3n^2+n}{2}$$

अर्थात्, $3\,S_n=\dfrac{n(2n^2+3n+1)}{2}$

इस प्रकार, $S_n=\dfrac{n(n+1)\,(2n+1)}{6}$

इस सूत्र का उपयोग करके, उदाहरणार्थ, हम प्रथम 10 प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग ज्ञात करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

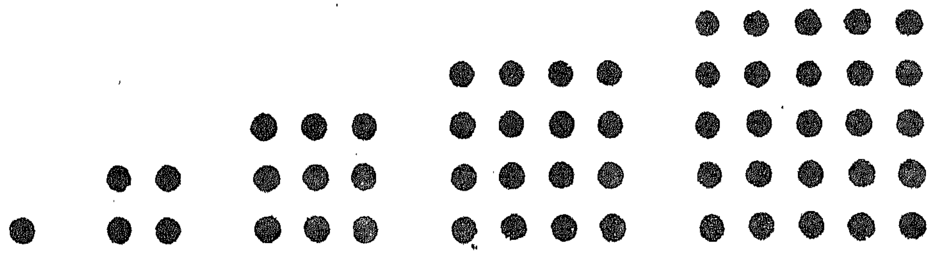
$$S_{10}=\frac{10\times 11\times 21}{6}=385$$

[पाठक को चाहिए कि वह इसी प्रकार सिद्ध करे कि प्रथम n **प्राकृत संख्याओं के घनों का योग** $\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$ **होता है**। आप किस सर्वसमिका से आरम्भ करेंगे ?

संकेत : सर्वसमिका $k^4-(k-1)^4=4k^3-6k^2+4k-1$ लीजिए।]

ऐसे प्रमाण मिलते हैं कि लगभग 4000 वर्ष पूर्व बेबीलोन के निवासी समांतर तथा गुणोत्तर अनुक्रमों के विषय में जानते थे। विभिन्न मृत्तिका शिलाओं (clay tablets) में से एक शिला में, जिसके विषय में विश्वास किया जाता है कि वह बेबीलोन के निवासियों के काल की है, संख्याओं 1 से 60 तक के वर्ग तथा संख्याओं 1 से 32 तक के घन अंकित हैं।

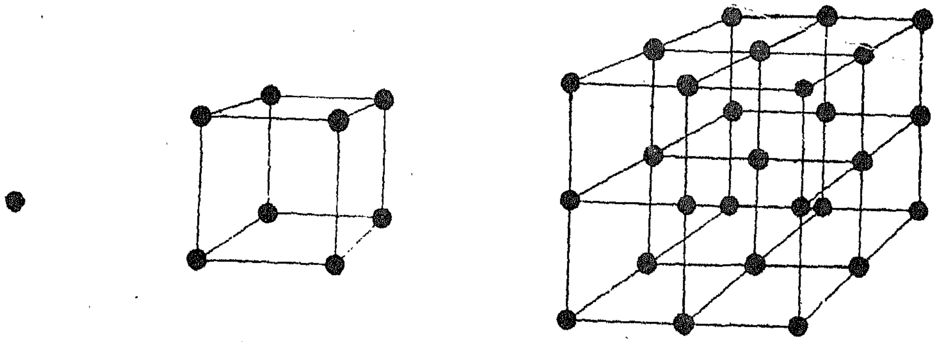
यूनान के निवासी संख्याओं का निरूपण ज्यामितीय आकारों में बिन्दुओं (dots) की सहायता से किया करते थे। उदाहरणार्थ, 4^2 को चार बिन्दुओं की भुजा के वर्ग के रूप में निरूपित किया जाता था जैसा कि नीचे आकृति 5.4 में दिखाया गया है :



$1^2=1$ $2^2=4$ $3^2=9$ $4^2=16$ $5^2=25$

आकृति 5.4 : यूनानियों द्वारा वर्ग संख्याओं का ज्यामितीय निरूपण

इसी प्रकार वे घन संख्याओं, उदाहरणार्थ, 27 को तीन बिन्दुओं की भुजा के घन के रूप में निरूपित करते थे जैसा कि नीचे आकृति 5.5 में दिखाया गया है :



$1^3=1$ $2^3=8$ $3^3=27$

आकृति 5.5 : यूनानियों द्वारा घन संख्याओं का ज्यामितीय निरूपण

यद्यपि समांतर अनुक्रम का योग सम्भवतया पहले ही ज्ञात था परन्तु **आर्किमीडीज (287-212 ई० पू०)** जिन्हें **'पूर्वकालीन महान गणितज्ञ'** कहा जाता है, के समय से पहले साहित्य में इसके सूत्र का कहीं स्पष्ट रूप से विवरण नहीं मिलता। आर्किमीडीज न केवल एक महान गणितज्ञ थे बल्कि अपने आविष्कारों के कारण वे एक बहुचर्चित व्यक्ति भी थे। उनके विषय में एक सुप्रसिद्ध कहानी है जो विशेषकर भौतिकी के विद्यार्थियों के लिए अत्यन्त रुचिपूर्ण है। राजा का विश्वास था कि जो ताज उसने बनवाया है, उसमें अशुद्ध सोना है। उसने आर्किमीडीज से कहा कि वे ताज की बनावट को क्षति पहुँचाए बिना उसे जाँच करने की विधि ज्ञात करें। आर्किमीडीज बहुत दिनों तक सोचते रहे परन्तु कोई विधि ज्ञात नहीं कर सके। एक दिन जब वे पानी में तैर रहे थे तो उन्होंने अनुभव किया कि पानी ने उनका शरीर आंशिक रूप से 'ऊपर उठा दिया' है। वे प्रसन्नता से उछल

पड़े। उन्होंने आज के एक प्रसिद्ध सिद्धांत, अर्थात् "जब कोई वस्तु पानी में डुबोई जाती है तो वह अपने भार के समान पानी का स्थानान्तरण करती है", के आधार का आविष्कार कर लिया था। उन्होंने ताज में मिश्रित वस्तुओं की जाँच में इस ही सिद्धांत का प्रयोग किया। प्रसंग की बात है, प्राकृत संख्याओं के वर्गों का सूत्र देने का श्रेय भी **आर्किमिडीज** को ही है।

हिन्दू गणितज्ञ समांतर अनुक्रमों के विषय में पहले से ही जानते थे परन्तु वर्गों तथा घनों के योग के सूत्र सर्वप्रथम **आर्यभट्ट** (जन्म 476 ई०) ने अपनी सुप्रसिद्ध कृति **आर्यभटीयम्**, जो लगभग 499 ई० में लिखी गई थी, में दिए थे। उन्होंने p वें पद से आरम्भ करके (प्रथम पद से नहीं) समांतर श्रेणी के n पदों के योग का सूत्र भी दिया।

एक अपरिमित गुणोत्तर श्रेणी के योग के लिए एक व्यापक व्यंजक सर्वप्रथम एक फ्रांसीसी **फ्रैंकोइस वीटा** (1540-1603 ई०) ने दिया था—जो व्यवसाय से वकील थे तथा शौक के रूप में उन्होंने गणित का अध्ययन किया।

अन्त में हम कुछ रोचक उदाहरणों पर विचार करते हैं जिनमें समांतर तथा गुणोत्तर दोनों ही श्रेणियाँ सम्बद्ध हैं।

उदाहरण 1 : यदि a, b तथा c एक समांतर श्रेणी के तीन क्रमागत पद हों तो k^a, k^b तथा k^c एक गुणोत्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पद होंगे। k को शून्येतर वास्तविक संख्या मानिए।

हल : क्योंकि a, b तथा c समांतर श्रेणी में हैं,

अतः, $b-a=c-b$

इसलिए, $k^{b-a}=k^{c-b}$

इस प्रकार, $\frac{k^b}{k^a}=\frac{k^c}{k^b}$, जिससे निष्कर्ष निकलता है कि k^a, k^b तथा k^c एक गुणोत्तर श्रेणी के क्रमागत पद हैं।

उदाहरण 2 : यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के mवें, nवें तथा pवें पद एक अन्य गुणोत्तर अनुक्रम के तीन क्रमागत पद हों, तो सिद्ध कीजिए कि m, n तथा p एक समांतर अनुक्रम के तीन क्रमागत पद होंगे।

हल : $t_m=br^{m-1}$,

$t_n=br^{n-1}$,

$t_p=br^{p-1}$, जहाँ 'b' गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद तथा 'r' सार्व अनुपात है।

हमें दिया है कि

$$\frac{t_n}{t_m}=\frac{t_p}{t_n} \quad \text{(क्यों ?)}$$

अर्थात्, $$\frac{br^{n-1}}{br^{m-1}}=\frac{br^{p-1}}{br^{n-1}}$$

इस प्रकार, $r^{2n-2}=r^{p+m-2}$, जिससे निष्कर्ष निकलता है कि

$$2n=p+m$$

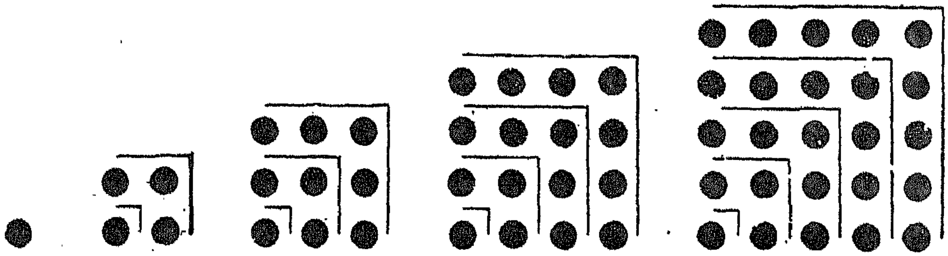
अर्थात्, $n-m=p-n$

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि m, n तथा p एक समांतर श्रेणी के तीन क्रमागत पद हैं ।

प्रश्नावली 5.7

1. सिद्ध कीजिए कि समांतर श्रेणी 1, 3, 5, ... का n पदों तक योग n^2 है ।

[हम देखते हैं कि प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग nवीं वर्ग संख्या है, जिसका यूनानियों को भी आभास हुआ था । वास्तव में उन्होंने इस सम्बन्ध को ज्यामितीय रूप से दर्शाया था जैसा कि आकृति 5.6 में दिखाया गया है ।]



$1=1^2$ $1+3=2^2$ $1+3+5=3^2$ $1+3+5+7=4^2$ $1+3+5+7+9=5^2$

आकृति 5.6 : $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

2. सिद्ध कीजिए कि प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ होता है ।

3. यदि $\frac{1}{x+y}$, $\frac{1}{2y}$ तथा $\frac{1}{y+z}$ एक समांतर श्रेणी के तीन क्रमागत पद हों, तो सिद्ध कीजिए कि x, y तथा z एक गुणोत्तर श्रेणी के तीन क्रमागत पद हैं ।

1 मुख्य संकल्पनाएँ

अनुक्रम, अनुक्रम के पद	दूरदर्शीय योग की विधि
परिमित तथा अपरिमित अनुक्रम	गुणोत्तर श्रेणी—गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद, सार्व अनुपात
अनुक्रम का nवाँ पद अथवा व्यापक पद	गुणोत्तर श्रेणी का nवाँ पद
फिबोनाशी अनुक्रम	गुणोत्तर श्रेणी के n पदों तक का योग
समांतर श्रेणी—समांतर श्रेणी का प्रथम पद, सार्व अंतर	अपरिमित गुणोत्तर श्रेणियाँ
समांतर श्रेणी का nवाँ पद	वर्गों के अनुक्रम—वर्ग संख्याएँ
समांतर श्रेणी के n पदों तक का योग	घनों के अनुक्रम—घन संख्याएँ

2 अग्रिम अध्ययन हेतु सुझाव

रुचिपूर्ण ऐतिहासिक विवरणों सहित अनुक्रमों के विषय में एक उत्तम पुस्तक निम्न है :

H. R. Jacobs: **Mathematics, A Human Endeavour,** W. H. Freeman and Company, San Francisco (U.S.A.), 1970.

स्कूल गणित श्रृंखला की लायब्रेरी में एक 'छोटी' रुचिपूर्ण पुस्तिका निम्न है:

S. N. Gelfand, etc : **Sequences, Combinations, Limits,** Translated and adapted from the Russian by L. Cohn and Joan Teller; The M.I.T. Press, Massachusetts (U.S.A.), 1969.

हिन्दू गणितज्ञों के योगदान के लिए पाठक अनुच्छेद 1.12 में दी गई पुस्तकें [4] तथा [5] देखें तथा अन्य ऐतिहासिक विवरण के लिए अनुच्छेद 1.12 की पुस्तक [7] देखें। इनके अतिरिक्त एक अन्य बहुमूल्य पुस्तक निम्न है:

M. Kline: **Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,** Oxford University Press, New York (U.S.A.), 1972.

एकक VI

गणितीय आगमन का सिद्धांत

गणित के किसी भी गहन अध्ययन के लिए गणितीय आगमन का सिद्धांत मौलिक है। इस 'सिद्धांत' के एक रूप की चर्चा की गई है तथा कुछ मौलिक परिणामों को सिद्ध करने में इसके अनुप्रयोगों को दर्शाया गया है।

6.1 भूमिका

विज्ञान सम्बन्धी निष्कर्षों को निकालने में आमतौर पर तर्कण (reasoning) के दो मौलिक प्रक्रमों (processes) का प्रयोग किया जाता है। इनमें से एक है **निगमन (deduction)** का प्रक्रम अर्थात् **व्यापक (general) से विशिष्ट (particular) के तर्कण का प्रक्रम**। उदाहरणार्थ, हम कहते हैं कि वे सभी पूर्णांक जिनके अंकों का योग 3 का गुणज है, 3 से विभाज्य होते हैं। क्योंकि 345 एक ऐसा पूर्णांक है जिसके अंकों का योग 3 का गुणज है अत: 345, 3 से विभाज्य है। एक व्यापक कथन से हम एक विशिष्ट कथन के विषय में निष्कर्ष निकाल रहे हैं।

दूसरा प्रक्रम है **आगमन (induction)** का प्रक्रम अर्थात् **विशिष्ट से व्यापक के तर्कण का प्रक्रम**। उदाहरणार्थ, हम कहते हैं कि 30 एक ऐसा पूर्णांक है जो 5 से विभाज्य है। अत: वे सभी पूर्णांक जिनका अन्त शून्य पर होता है, 5 से विभाज्य होते हैं। एक विशिष्ट कथन से हम एक व्यापक निष्कर्ष निकाल रहे हैं। विज्ञान सम्बन्धी तर्कण में ऐसे निष्कर्ष को एक **विवेकपूर्ण अनुमान (conjecture अथवा educated guess)** कहा जाता है।

क्या हम कोई अन्य निष्कर्ष भी निकाल सकते थे? हाँ, उदाहरणार्थ हम यह तर्क भी दे सकते थे कि 30, 5 से विभाज्य है तथा 30 दो अंकों का एक पूर्णांक है। अत: दो अंकों वाले सभी पूर्णांक 5 से विभाज्य होते हैं। निश्चय ही यह निष्कर्ष असत्य है। (क्यों?)

विज्ञान सम्बन्धी ज्ञान के विकास में दोनों प्रक्रम ही एक अधिकृत स्थान रखते हैं। इस एकक में हम अपना सम्बन्ध यह बताने में रखेंगे कि गणित में आगमनिक तर्कण (inductive reasoning) कैसे प्रयुक्त होता है, इसे सही ढंग से किस प्रकार प्रयोग किया जाए तथा इसका गणितीय आगमन के सिद्धांत (principle of mathematical induction) से, यदि कोई सम्बन्ध है, तो वह क्या है।

6.2 गणित में आगमन अथवा आगमनिक तर्कण का स्थान

विकास की प्रक्रिया में गणित आगमन का विज्ञान है। आगमन प्रेक्षण से प्रारम्भ होता है। हम प्रेक्षण करते हैं तथा एक अनुमानित निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए सहज ज्ञान का प्रयोग करते हैं। अनुमानित इसलिए क्योंकि यह केवल एक **संभावित तथ्य** अथवा **विवेकपूर्ण अनुमान** ही है। यह अनुमान सत्य भी हो सकता है परन्तु इसे **व्यवस्थित निगमनिक तर्कण** (deductive reasoning) द्वारा सिद्ध किया जाना चाहिए। अथवा यह असत्य भी हो सकता है, परन्तु एक ऐसा **विरोधउदाहरण** **(counterexample)** खोजकर जहाँ यह अनुमान गलत हो जाए, इसे दर्शाया जाना चाहिए।

एक महत्वपूर्ण प्रश्न यह है कि **अशुद्ध निष्कर्ष किस प्रकार प्राप्त न किए जाएँ**? दूसरे शब्दों में, **एक अनुमान प्राप्त कर लेने के बाद इसकी सत्यता को कैसे स्थापित किया जाए अथवा इसकी संगतता को कैसे असत्य प्रमाणित किया जाए**? इससे पहले कि हम इस अति महत्वपूर्ण प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करें, हम आगमन अथवा आगमनिक तर्कण के प्रयोग के कुछ और उदाहरणों का अध्ययन करते हैं।

उदाहरण 1 : हम देखते हैं कि प्राकृत संख्याओं 5, 15, 25, 35, 125, 625 में से प्रत्येक 5 से विभाज्य है। अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि ये सभी प्राकृत संख्याएँ जिनके इकाई के स्थान पर अंक 5 है, 5 से विभाज्य होते हैं। पुनः यह एक अनुमान है जिसे व्यवस्थित निगमनिक तर्कण द्वारा सिद्ध किया जाना चाहिए अथवा एक विरोधउदाहरण खोज कर इसे असत्य प्रमाणित किया जाना चाहिए। [क्या आप यह सिद्ध कर सकते हैं कि यह अनुमान वास्तव में सत्य ही है ?]

उदाहरण 2 : $2^{2^1}+1$, अर्थात् 5, एक अभाज्य संख्या है। पुनः $2^{2^2}+1$, अर्थात् 17, एक अभाज्य संख्या है। साथ ही $2^{2^3}+1$ अर्थात् 257, भी एक अभाज्य संख्या है। अतः हम निष्कर्ष निकालते हैं कि प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए $2^{2^n}+1$ एक अभाज्य संख्या होती है। वास्तव में, महान फ्रांसीसी गणितज्ञ **पियरी दि फर्मे** (1601—1665) का यह अनुमान था कि प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए $2^{2^n}+1$ एक अभाज्य संख्या है। उन्होंने अपने समय के गणितज्ञों को चुनौती दी थी कि वे इसे असत्य प्रमाणित करें। परन्तु अनेकों वर्ष बाद स्विटज़रलैंड के गणितज्ञ **लियोनार्ड ऑयलर** (1707-1783) ने यह दिखाया था कि $2^{2^5}+1$ अर्थात् 4294967297, एक अभाज्य संख्या नहीं है क्योंकि यह 641 से विभाज्य है।

हमने प्रेक्षण किया और एक अनुमान पर पहुँचे। फिर हमने एक विरोधउदाहरण खोज लिया जिससे हमारा अनुमान असत्य प्रमाणित हो गया।

उदाहरण 3 : हम देखते हैं कि निम्नलिखित गुणनखण्डों में से प्रत्येक में विभिन्न पदों के गुणांकों के निरपेक्ष मान या तो 1 से कम अथवा 1 के बराबर हैं :

$$x^1-1=(x-1)$$
$$x^2-1=(x-1)\,(x+1)$$
$$x^3-1=(x-1)\,(x^2+x+1)$$

$$x^4-1=(x-1)\ (x+1)\ (x^2+1)$$
$$x^5-1=(x-1)\cdot(x^4+x^3+x^2+x+1)$$

अतः हमारा यह अनुमान है कि जब x^n-1 को, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है, ऐसे गुणनखण्डों में, जिनके गुणांक पूर्णांक हों, में व्यक्त किया जाए तो किसी भी गुणांक का निरपेक्ष मान 1 से अधिक नहीं होगा। इस व्यापक कथन को सिद्ध करने के सभी प्रयास विफल हुए। परन्तु 1941 ई० में रूसी गणितज्ञ वी इवानोव ने एक विरोध उदाहरण प्रस्तुत कर दिया। उन्होंने यह ज्ञात कर लिया कि $x^{105}-1$ का एक गुणनखंड इस अनुमान का खण्डन करता है। यह गुणनखंड, जो घात 48 का एक बहुपद है, निम्न है :

$$x^{48}+x^{47}+x^{46}-x^{43}-x^{42}-2x^{41}-x^{40}-x^{39}+x^{36}+x^{35}+x^{34}+x^{33}+x^{32}$$
$$+x^{31}-x^{28}-x^{26}-x^{24}-x^{22}-x^{20}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{12}-x^{9}-x^{8}$$
$$-2x^7-x^6-x^5+x^2+x+1$$

पुनः हमने प्रेक्षण किया तथा एक अनुमान पर पहुँच गए। फिर हम एक विरोधउदाहरण प्राप्त करने में समर्थ हो गए जिससे हमारा अनुमान असत्य प्रमाणित हो गया।

वैज्ञानिक का कोई अनुमान, अनुमान ही रहता है चाहे हम इसके पक्ष में कितने ही उदाहरण प्राप्त कर लें। गणित में ऐसे अनेकों अनुमान हैं जो प्रमाण की अनुपस्थिति में अनुमान ही हैं, यद्यपि इनके पक्ष में हमारे पास वस्तुतः हजारों उदाहरण उपलब्ध हैं। हम ऐसे एक अनुमान का उदाहरण देते हैं।

1742 ई० में सी० गोल्डबाक (1690-1764) ने स्विट्जरलैंड के प्रसिद्ध गणितज्ञ लियोनार्ड ऑयलर को पत्र लिखकर एक समस्या प्रस्तुत की। गोल्डबाक ने प्रेक्षण किया कि 2 के अतिरिक्त प्रत्येक सम प्राकृत संख्या, जिस पर उन्होंने विचार किया था, दो अभाज्य संख्याओं के योग के रूप में व्यक्त की जा सकती है। उदाहरणार्थ, $4=2+2$, $6=3+3$, $8=3+5$, इत्यादि। उन्होंने ऑयलर से पूछा कि क्या यह प्रत्येक सम प्राकृत संख्या के लिए सत्य है। ऑयलर, गोल्डबाक की समस्या का हल नहीं दे सके अर्थात् वे न तो इसका कोई प्रमाण दे सके और न ही कोई विरोध उदाहरण दे सके। वास्तव में कोई अन्य भी आज तक इसका हल नहीं दे सका है। यह समस्या आज तक अनुमान ही बनी हुई है।

संक्षेप में, विज्ञान सम्बन्धी ज्ञान के विकास में आगमन अथवा आगमनिक तर्कण का महत्वपूर्ण योगदान है। साथ ही इसका सही ढंग से प्रयोग करना भी उतना ही महत्वपूर्ण है। आगमन का प्रयोग करके एक अनुमान पर पहुँचने के पश्चात उस अनुमान को सिद्ध करने का कठिन कार्य आरम्भ होता है।

यदि अनुमान एक कथन, उदाहरणार्थ $P(n)$, के रूप में है, जो प्राकृत संख्याओं से सम्बन्धित है तो गणितीय आगमन का सिद्धांत इसकी उपपत्ति की एक विधि प्रदान करता है। इस सिद्धांत के एक रूप का अगले अनुच्छेद में वर्णन किया गया है।

6.3 गणितीय आगमन का सिद्धांत—एक रूप

मान लीजिए $P(n)$ प्राकृत संख्या n से सम्बन्धित एक कथन है तब यदि

(क) $P(1)$ सत्य है, तथा

(ख) जब-जब $P(k)$ सत्य है तो $P(k+1)$ भी सत्य है,

तो हम निष्कर्ष निकालते हैं कि $P(n)$ सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है।

दूसरे शब्दों में, यह सिद्ध करने के लिए कि कोई कथन $P(n)$ सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है हमें दो चरण अवश्य पूरे करने चाहिए; एक हमें सिद्ध करना चाहिए कि $P(1)$ सत्य है। दूसरे, हमें यह सिद्ध करना चाहिए कि जब भी $P(k)$ सत्य है तो $P(k+1)$ भी सत्य है।

अब हम उपपत्ति की इस विधि के प्रयोग को दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : दिखाइए कि प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n^2 होता है।

हल : निश्चय ही यह प्राकृत संख्या n से सम्बन्धित एक कथन है। हम इसे $P(n)$ से व्यक्त करते हैं तथा निम्न प्रकार से लिखते हैं :

$$P(n) : 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

प्रथम, हमें यह सिद्ध करना चाहिए कि $P(1)$ सत्य है। अब $P(1)$ क्या है ? यह एक कथन है कि प्रथम 1 विषम संख्या का योग 1^2 है।

दूसरे शब्दों में, $P(1) : 1=1^2$

क्या $P(1)$ सत्य है ? निश्चय ही, यह सत्य है।

दूसरे, हमें यह सिद्ध करना चाहिए कि जब भी $P(k)$ सत्य है $P(k+1)$ भी सत्य है।

अतः आइए हम $P(k)$ को सत्य मान लें। अर्थात्

$$P(k) : \quad 1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2 \qquad (1)$$

अब हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि जब भी $P(k)$ सत्य है, $P(k+1)$ भी सत्य है।

$P(k+1)$ क्या है ?

$$P(k+1) : 1+3+5+\ldots+[2(k+1)-1]=(k+1)^2 \qquad (2)$$

क्या $P(k+1)$ सत्य है ? आइए देखें। आइए (2) के वाम पक्ष की जाँच करें। अब,

$$\begin{aligned} \text{वाम पक्ष} &= 1+3+5+\ldots+(2k-1)+[2(k+1)-1] \\ &= k^2+(2k+1), \text{ क्योंकि } P(k) \text{ सत्य है} \\ &= (k+1)^2 \\ &= (2) \text{ का दक्षिण पक्ष} \end{aligned}$$

इस प्रकार, जब भी $P(k)$ सत्य है, $P(k+1)$ भी सत्य है। अतः हमने यह दिखा दिया है कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $P(n)$ सत्य है, अर्थात् प्रथम n विषम प्राकृत संख्याओं का योग n^2 होता है।

उपपत्ति की यह विधि वास्तव में उपपत्ति कि एक शक्तिशाली विधि है। क्या आप देख सकते हैं कि हमने कथनों के एक अपरिमित अनुक्रम को सिद्ध कर लिया है ? दूसरे शब्दों में, यह सिद्ध करके कि $P(n)$ सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है, हमने यह सिद्ध कर दिया है कि निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन सत्य है :

$$\mathbf{P(1)} : \quad 1=1^2=1$$
$$\mathbf{P(2)} : \quad 1+3=2^2=4$$
$$\mathbf{P(3)} : \quad 1+3+5=3^2=9$$

$P(4): \quad 1+3+5+7=4^2=16$

....

$P(k): \quad 1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2$

$P(k+1): 1+3+5+\ldots+(2k+1)=(k+1)^2$

....

उदाहरण 2 : सिद्ध कीजिए कि $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$, प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए, 9 से विभाज्य है।

हल : पुनः यह प्राकृत संख्या n से सम्बंधित एक कथन है। हम इसे $P(n)$ से व्यक्त करते हैं तथा निम्न प्राप्त करते हैं :

$P(n): n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$, 9 से विभाज्य है।

प्रथम, हमें सिद्ध करना चाहिए कि $P(1)$ सत्य है। $P(1)$ क्या है? यह एक कथन है कि $1^3+2^3+3^3$, 9 से विभाज्य है। क्या $1^3+2^3+3^3$, 9 से विभाज्य है? निश्चय ही यह सत्य है क्योंकि, $1^3+2^3+3^3=1+8+27=36$ तथा 36, 9 से विभाज्य है।

अब, आइए मान लें कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात्

$k^3+(k+1)^3+(k+2)^3$, 9 से विभाज्य है। (1)

हम यह भी सिद्ध करना चाहते हैं कि जब भी $P(k)$ सत्य है, $P(k+1)$ भी सत्य है। अब $P(k+1)$ क्या है?

$P(k+1): (k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3$, 9 से विभाज्य है। (2)

क्या $P(k+1)$ सत्य है? आइए देखें। हम देखते हैं कि

$$(k+1)^3+(k+2)^3+(k+3)^3=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9k^2+27k+27$$

$$=(k+1)^3+(k+2)^3+k^3+9(k^2+3k+3) \quad (3)$$

अब क्या (3) में दिया गया व्यन्जक 9 से विभाज्य है? निश्चय ही, $(k+1)^3+(k+2)^3+k^3$, 9 से विभाज्य है क्योंकि $P(k)$ सत्य है। पुनः $9(k^2+3k+3)$ का एक गुणनखंड 9 है, अतः यह 9 से विभाज्य है। निस्संदेह दोनों का योग भी 9 से विभाज्य है।

इस प्रकार जब भी $P(k)$ सत्य है, $P(k+1)$ भी सत्य है।

अतः हमने यह दिखा दिया है कि प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए $P(n)$ सत्य है अर्थात् प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए $n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$, 9 से विभाज्य होता है।

पुनः हमने कथनों के एक अपरिमित अनुक्रम को सिद्ध कर लिया है।

उदाहरण 3 : सिद्ध कीजिए कि प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ होता है।

हल : दूरदर्शीय योगों की विधि से हम यह पहले ही दिखा चुके हैं कि वास्तव में यह ऐसा ही है। (देखिए अनुच्छेद 5.10) अब हम गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करेंगे तथा यह सिद्ध करेंगे कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $P(n)$ सत्य है।

अब, $P(n): 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

क्या $P(1)$ सत्य है ? $P(1): 1^2 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$

निश्चय ही वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

इस प्रकार, $P(1)$ वास्तव में सत्य है।

अब मान लीजिए कि $P(k)$ सत्य है।

$$P(k): 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \quad (1)$$

हम सिद्ध करना चाहते हैं कि जब भी $P(k)$ सत्य है, $P(k+1)$ भी सत्य है। $P(k+1)$ क्या है?

$$P(k+1): 1^2+2^2+3^2+\ldots+(k+1)^2 = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

क्या $P(k+1)$ सत्य है ? आइए देखें। आइए इसके वाम पक्ष की जाँच करें।

वाम पक्ष $= 1^2+2^2+3^2+\ldots+k^2+(k+1)^2$

$= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2$, क्योंकि $P(k)$ सत्य है।

$= \frac{k+1}{6}\left[k(2k+1)+6(k+1)\right]$

$= \frac{k+1}{6}(2k^2+7k+6)$

$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$ = दक्षिण पक्ष,

इस प्रकार जब भी $P(k)$ सत्य है, $P(k+1)$ भी सत्य है।

अतः हमने यह सिद्ध कर दिया है कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $P(n)$ सत्य है। पुनः हमने कथनों के एक अपरिमित अनुक्रम को सिद्ध कर दिया है।

उदाहरण 4 : सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, जबकि $x > -1$ हो।

हल : इस कथन को, जिसे सिद्ध किया जाना है, हम $P(n)$ से व्यक्त करते हैं, अर्थात्

$$P(n): (1+x)^n \geqslant 1+nx,\ x > -1$$

क्या $P(1)$ सत्य है ? $P(1): (1+x) \geqslant (1+x)$, जबकि $x > -1$ है।

निश्चय ही $P(1)$ सत्य है।

अब, मान लीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात्

$$P(k): (1+x)^k \geqslant 1+kx, \text{ जबकि } x > -1 \text{ है।} \quad (1)$$

हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि जब भी $P(k)$ सत्य है, $P(k+1)$ भी सत्य है।

अब, $P(k+1)$ क्या है ?

$P(k+1): (1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$, जबकि $x > -1$ है।

$P(k+1)$ में, वाम पक्ष $= (1+x)^{k+1}$

$= (1+x)^k(1+x)$

परन्तु क्योंकि $x > -1$ (अर्थात्, $1+x>0$) है तथा $(1+x)^k \geqslant 1+kx$ है, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$(1+x)^{k+1} \geqslant (1+kx)\ (1+x)$$

अर्थात्, $(1+x)^{k+1} \geqslant 1+x+kx+kx^2$ (2)

पुनः क्योंकि k एक प्राकृत संख्या है तथा x^2 सदैव ऋणेतर है,अतः kx^2 सदैव ऋणेत्तर है। अतः यदि हम (2) के दक्षिण पक्ष से kx^2 को छोड़ दें तो (2) में दी गई असमिका तब भी सत्य होगी। इस प्रकार हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(1+x)^{k+1} \geqslant 1+x+kx$$

अर्थात्, $(1+x)^{k+1} \geqslant 1+(k+1)x$

इस प्रकार, जब भी $P(k)$ सत्य है, $P(k+1)$ भी सत्य है।

अतः हमने यह सिद्ध कर लिया है कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $P(n)$ सत्य है। पुनः हमने कथनों के एक अपरिमित अनुक्रम को सिद्ध कर लिया है।

किसी कथन को गणितीय आगमन के सिद्धांत से सिद्ध करने के लिए ये दोनों चरण आवश्यक हैं, अन्यथा यह हो सकता है कि हम कोई असंगत परिणाम सिद्ध कर लें। आइएं निम्न उदाहरण पर विचार करें:

उदाहरण 5 : कोई प्राकृत संख्या अपने से तुरन्त पश्चात् आने वाली प्राकृत संख्या के समान होती है अर्थात्

$$P(n):\quad n=n+1$$

हल : आइए मान लें कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात्

$P(k):k=k+1$ (1)

हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि $P(k+1)$ सत्य है।

अब, $P(k+1):\quad k+1 = k+2$

$P(k+1)$ में,

वाम पक्ष $=k+1$ (2)

क्योंकि $P(k)$ को सत्य मान लिया गया है, अतः $k=k+1$। इस प्रकार (2) में

वाम पक्ष $=(k+1)+1=k+2$

जो कि, निस्संदेह, $P(k+1)$ का दक्षिण पक्ष है। अतः हमने यह सिद्ध कर दिया है कि जब भी $P(k)$ सत्य है तो $P(k+1)$ भी सत्य है। **परन्तु क्या हम यह कह सकते हैं कि $P(n)$ सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए सत्य है ? नहीं, निश्चय ही नहीं।** हमने यह जाँच नहीं की कि $P(1)$ सत्य है अथवा नहीं। यदि हमने यह जाँच की होती तो हमें ज्ञात हो जाता कि $P(1)$ असत्य है। दूसरे शब्दों में, हमने तुरन्त ही एक विरोध-उदाहरण प्राप्त कर लिया होता जिससे यह स्थापित हो जाता कि दिया हुआ कथन असत्य है।

उदाहरण 6 : सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए n^2-n+41 एक अभाज्य संख्या है।

हल : आइए, हम इस कथन को कि n^2-n+41 एक अभाज्य संख्या है $P(n)$ से व्यक्त करें।

क्या P(1) सत्य है ? निश्चय ही यह सत्य है क्योंकि $P(1)=1^2-1+41=41$। अब मान लीजिए कि हम यह जाँच करने का प्रयत्न ही नहीं करते कि जब भी $P(k)$ सत्य है, $P(k+1)$ भी सत्य है

तथा यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $P(n)$ सत्य है। इस प्रकार हम एक गम्भीर गलती कर जाएंगे।

न केवल $n=1$, 2 अथवा 3 के लिए ही $P(n)$ सत्य है अपितु यह 40 या इससे छोटी प्रत्येक प्राकृत संख्या के लिए भी सत्य है। परन्तु $n=41$ के लिए हम देखते हैं कि n^2-n+41 एक अभाज्य संख्या नहीं है।

अतः हम पुनः यह कहेंगे कि गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करते समय दोनों चरणों की जाँच अवश्य की जानी चाहिए अन्यथा यह सम्भव है कि हम कुछ हानिकारक निष्कर्षों पर पहुँच जाएं।

प्रश्नावली 6.1

निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन को सिद्ध करने के लिए गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग कीजिए :

1. किसी समांतर श्रेणी जिसका प्रथम पद a तथा सार्व अंतर d हो, का nवाँ पद $a+(n-1)d$ होता है।
2. प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग $\frac{n(n+1)}{2}$ होता है।
(अनुच्छेद 5.5 का उदाहरण 2 भी देखिए।)
3. सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $n(n+1)(n+2)$, 6 से विभाज्य होता है।
4. $1+4+7+\ldots+(3n-2)=\frac{n(3n-1)}{2}$
5. $4+8+12+\ldots+4n=2n(n+1)$
6. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$
7. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

*8. $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots+[a+(n-1)d]=\frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right]$
[आपको याद होगा कि यह एक समांतर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग है। (अनुच्छेद 5.5 भी देखिए।)]

*9. $b+br+br^2+\ldots+br^{n-1}=\frac{b(1-r^n)}{1-r}, r\neq 1$
[आपको याद होगा कि यह एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग है। (अनुच्छे 5.8 भी देखिए।)]

10. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

11. $1.2+2.3+3.4+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

12. $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

13. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए $2^n>n$ होता है।

14. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए $3^{2n}-1$, 8 से विभाज्य होता है।
[संकेत : $3^{2(k+1)}-1=9(3^{2k}-1)+8$ लिखिए।]

15. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए $10^{2n-1}+1$, 11 से विभाज्य होता है।
[संकेत : $10^{2k+1}+1=10^2(10^{2k-1}+1)-99$ लिखिए।]

16. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए, $2^{3n}-1$, 7 से विभाज्य होता है।
[संकेत : $2^{3k+3}-1=8(2^{3k}-1)+7$ लिखिए।]

17. $1+2+3+\ldots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$

18. n अवयवों के किसी समुच्चय के सभी उपसमुच्चयों की संख्या 2^n होती है।

19. दिखाइए कि यदि कथन $P(n)$: $2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)+2$, $n=k$ के लिए सत्य हो तो यह $n=k+1$ के लिए भी सत्य है। क्या हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $P(n)$ प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सत्य है?

20. सिद्ध कीजिए कि x^n-y^n प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए $x-y$ से विभाज्य होता है, जहाँ $x-y\neq0$ है।
[संकेत : $x^{k+1}-y^{k+1}=x^{k+1}-x^ky+x^ky-y^{k+1}$]

6.4 'आगमन' तथा इसका 'सिद्धांत'

'गणितीय आगमन के सिद्धांत' में 'आगमन' शब्द का प्रयोग दुर्भाग्यपूर्ण है। यह एक मिथ्या नाम है। इस 'सिद्धांत' में आगमनिक कुछ भी नहीं है। वास्तव में यह सिद्धांत आगमनिक तर्कण के प्रक्रम से बहुत भिन्न है। यह सत्य है कि किसी निष्कर्ष अथवा अनुमान पर पहुँचने के लिए आगमन अथवा आगमनिक तर्कण का प्रयोग किया जाता है। परन्तु जब हम किसी निष्कर्ष अथवा अनुमान पर पहुँच जाते हैं तो यह 'सिद्धांत' इसकी संगतता (सत्यता) प्रमाणित करने में हमें एक गूढ़ तथा सुन्दर विधि प्रदान करता है। जब तक हम ऐसा नहीं करते अथवा जब तक हम कोई विरोधउदाहरण प्राप्त नहीं कर लेते यह एक संभावित तथ्य अथवा विवेकपूर्ण अनुमान ही रह जाता है चाहे हम इसके पक्ष में कितने ही उदाहरण प्राप्त कर लें। दूसरे शब्दों में, आगमनिक तर्कण का प्रयोग $P(n)$ के रूप की अभिधारणा (postulate) करने अथवा अनुमान लगाने में किया जाता है। परन्तु जैसे ही $P(n)$ के रूप की अभिधारणा कर ली जाती है आगमन का कार्य समाप्त हो जाता है तथा 'गणितीय आगमन का सिद्धांत' इसका स्थान ले लेता है।

6.5 गणितीय आगमन की उत्पत्ति (Origin of Mathematical Induction)

यद्यपि गणितीय आगमन के सिद्धांत की उत्पत्ति का श्रेय फ्रांसीसी गणितज्ञ ब्लेज़ पास्कल (1623-1662) को दिया जाता है, इटली के गणितज्ञ फ्रांसिस्को मौरोलिकस (1494-1575) ने इससे पूर्व अपने लेखों में इस

सिद्धांत का प्रयोग किया था। हमें हिन्दुओं (भास्कर, 1153 ई०) तथा यूनानियों के लेखों से भी गणितीय आगमन के सिद्धांत के विषय में कुछ संकेत प्राप्त होते हैं।

'Induction' (आगमन) शब्द का प्रयोग सम्भवतः सर्वप्रथम ब्रिटिश गणितज्ञ जॉन वालिस (1616-1703) ने किया था। बाद में स्विटजरलैंड के गणितज्ञ जेम्स बर्नूली (1655-1705) ने इस नाम को प्रयोग किए बिना द्विपद-प्रमेय (Binomial Theorem) की उपपत्ति प्रदान करने में इस 'सिद्धांत' का प्रयोग किया। द्विपद-प्रमेय का अध्ययन हम एकक VIII में करेंगे।

"गणितीय आगमन" का उन अर्थों में प्रयोग जिसका वर्णन हमने ऊपर किया है, सर्वप्रथम ब्रिटिश गणितज्ञ ऑगस्टस डीमोरगान (1806-1871) ने Penny Cyclopedia, लंदन, 1838 में छपे अपने लेख "Induction (Mathematics)" में किया था। यह नाम उस समय के गणितज्ञों द्वारा तुरंत स्वीकृत कर लिया गया और लगभग चालीस वर्षों के अंतराल में सभी स्थानों के गणितज्ञों ने इसका प्रयोग करना प्रारंभ कर दिया।

6.6 मुख्य संकल्पनाएँ

निगमन	**गणितीय आगमन का सिद्धांत**
आगमन अथवा आगमनिक तर्कण	

6.7 अग्रिम अध्ययन हेतु सुझाव

आगमन पर दो श्रेष्ठ पुस्तकें निम्न हैं :

[1] G. Polya : **Induction and Analogy in Mathematics**, Princeton University Press, New Jersey (U. S. A.), 1954.

[2] G. Polya : **Patterns of Plausible Influences**, Princeton University Press, New Jersey (U. S. A.), 1954.

इस विषय पर एक अन्य उत्तम पुस्तक निम्न है :

[3] I.S. Sominiskii : **The Method of Mathematical Induction**, Blaisdell Publishing Company, New York (U. S. A.), 1961.

गणितीय आगमन की उत्पत्ति के विषय में पाठक निम्न दो लेख देखें :

[4] W. H. Bussey : **The Origin of Mathematical Induction**, American Mathematical Monthly (Journal), Vol. 24, 1917, pp. 199—206.

[5] F. Cajori : **Origin of the Name 'Mathematical Induction'**, American Mathematical Monthly (Journal), Vol. 25, 1918, pp. 197—201.

एक परिमित समुच्चय के सभी उपसमुच्चयों की संख्या के विषय में पाठक निम्न लेख देखें :

[6] M. S. Arora and J. D. Allen : **A Non-Combinatorial Proof of the Number of All Subsets of a Finite Set**. The Mathematics Teacher (Journal), Vol. **LXIII**, April 1970, pp. 312.

इस विषय पर एक अन्य रुचिपूर्ण लेख निम्न है :

[7] J. V. Uspensky : **A Curious Case of the Use of Mathematical Induction in Geometry**, American Mathematical Monthly (Journal), Vol 34, 1927, pp. 247—250.

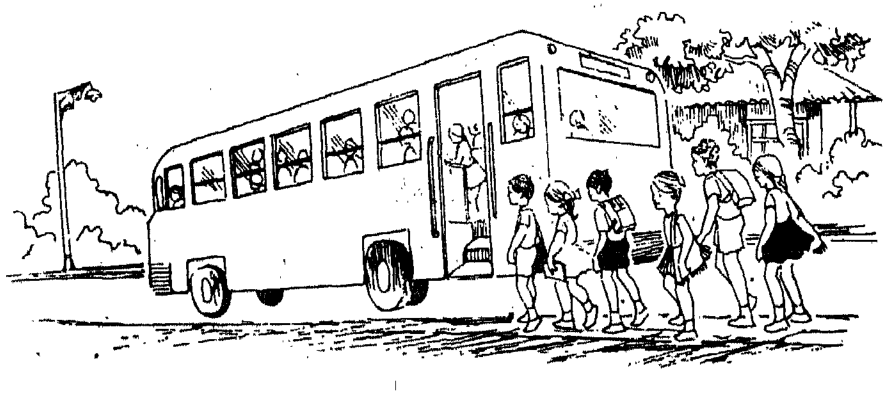
एकक VII

बिना गिनती किए कैसे गिनें?

इस एकक में हमने क्रमचयों (permutations) तथा संचयों (combinations) की संकल्पनाओं का परिचय दिया है जो संचय विन्यास के विज्ञान (combinatorics), जिसे चयन का गणित (mathematics of choice) भी कहते हैं, के अध्ययन में अति मौलिक हैं। ये संकल्पनाएँ हमें वास्तविक गिनती किए बिना गिनती की 'उत्तम' विधियाँ प्रदान करती हैं।

7.1 भूमिका

एक समय की बात है कि एक संयुक्त परिवार में विद्यालय जाने वाले 6 बच्चे थे। उनकी एक दूसरे से खूब बनती थी परन्तु स्कूल बस में चढ़ते समय उनमें धक्का-मुक्की व लड़ाई हो जाती थी तथा उनमें गम्भीर वाद विवाद होता था। राज कहता 'मैं यहाँ सबसे पहले आया था अतः मैं ही पहले बस में चढ़ूँगा'। मोहन कहता, 'नहीं! मैं सबसे छोटा हूँ, मुझे पहले चढ़ना चाहिए' इत्यादि। इस प्रकार बस में सवार होने के लिए उनमें विवाद होता था तथा एक दूसरे को धकेलते हुए वे लड़ पड़ते थे। जब वे आपस में इस समस्या को न सुलझा सके तो उन्होंने अपने दादाजी से कहा कि वह बस में सवार होने के लिए उनके लिए किसी व्यवस्थित क्रम की खोज करें। उनके दादाजी बहुत निष्पक्ष व्यक्ति थे। वे उनमें से किसी का भी पक्ष नहीं लेना चाहते थे। अतः उन्होंने कहा कि वे बस के लिए पंक्ति बनाएँ तथा यह देखे बिना कि कौन पहले आया या कौन सबसे छोटा है, वे प्रतिदिन पंक्ति में अपना स्थान परिवर्तन कर लें। सब से बड़े लड़के अरुण ने, जिसे गणित का



ज्ञान या कुछ परिकलना करके कहा 'क्या आप जानते हैं कि हमें कितने विन्यास (arrangements) प्राप्त होंगे तथा सभी सम्भव विन्यासों को समाप्त करने में हमें कितना समय लगेगा ?' उसने अपने प्रश्न का उत्तर स्वयं ही दे दिया। उसने कहा, 'कुल 720 विन्यास होंगे। यह मानकर कि वर्ष में विद्यालय जाने के 240 दिन होते हैं, हमें सभी सम्भव विन्यासों को समाप्त करने में 3 वर्ष लगेंगे। यदि हम प्रातः तथा सायंकाल दोनों समय स्थान परिवर्तन करें फिर भी हमें $1\frac{1}{2}$ वर्ष का समय लगेगा।

अरुण को इस संख्या का ज्ञान कैसे हुआ ? निश्चय ही उसने सभी विन्यासों को लिखकर उनकी गिनती नहीं की। उसने गणन की एक विधि का प्रयोग किया जिसका अध्ययन एक व्यापक शीर्षक संचय विन्यास का गणित (**Combinatorial Mathematics** or **Combinatorics**) अथवा चयन का गणित (**Mathematics of choice**) के अन्तर्गत आता है।

संचय विन्यास के गणित के अध्ययन में एक मूलभूत प्रश्न है, 'कितने ?' अरुण ने यह प्रश्न पूछा था कि, 'छः बच्चों को एक पंक्ति में खड़ा करने की कितनी विधियाँ हैं ?'

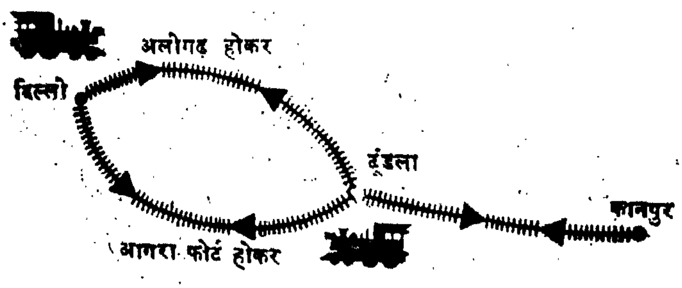
एक परीक्षा में 10 सत्य-असत्य प्रश्न हैं। इनके उत्तरों के कितने अनुक्रम सम्भव हैं ? एक कक्षा में 24 विद्यार्थी हैं। कितनी विधियों से इनमें से 1 मुख्य तथा 3 उपमुख्य बच्चों का चयन सम्भव है, जबकि प्रत्येक विद्यार्थी इन दोनों पदों में से कोई भी पद प्राप्त कर सकता हो ? एक सिक्के को 3 बार उछाला जाता है। कुल कितने परिणाम सम्भव हैं ? इन तथा इसी प्रकार के अन्य प्रश्नों, जिनमें 'कितने ?' पूछा जाता है, के उत्तर संचय विन्यास के गणित द्वारा प्राप्त होते हैं।

संचय विन्यास के गणित का क्षेत्र विस्तृत है। हम केवल कुछ मूल गणन विधियों का ही अध्ययन करना चाहेंगे ताकि हम उपरोक्त प्रकार के प्रश्नों के उत्तर प्राप्त कर सकें। परन्तु इससे पहले कि हम ऐसा करें हमें एक मूलभूत गणन सिद्धांत सीख लेना चाहिए।

7.2 गणन का मूलभूत सिद्धांत (The Fundamental Principle of Counting)

आइए पहले निम्नलिखित उदाहरणों का अध्ययन करें :

उदाहरण 1: दिल्ली और टूंडला के बीच दो रेल मार्ग हैं। एक अलीगढ़ होकर और दूसरा आगरा फोर्ट होकर तथा टूंडला और कानपुर के बीच एक ही रेल मार्ग है। साथ ही, दिल्ली और कानपुर के बीच टूंडला होकर जाने के अतिरिक्त कोई अन्य रेल मार्ग नहीं है।



आकृति 7.1

कोई व्यक्ति दिल्ली से कानपुर की यात्रा कितनी विधियों से कर सकता है? स्पष्ट है कि ऐसी 2 विधियाँ हैं। वह या तो दिल्ली-टूंडला (अलीगढ़ होकर)-कानपुर मार्ग से या दिल्ली-टूंडला (आगरा फोर्ट होकर)-कानपुर मार्ग से यात्रा कर सकता है।

उदाहरण 2 : एक सिक्का दो बार उछाला जाता है तथा प्राप्त परिणामों को लिख लिया जाता है। कुल कितने परिणाम सम्भव हैं? यदि हम जिस सिक्के पर 'Head' (चित) आए उसे 'H' से तथा जिस पर 'Tail' (पट) आए उसे 'T' से व्यक्त करें तो हमें कुल सम्भव परिणाम HH, HT, TH तथा TT प्राप्त होंगे। [उदाहरणार्थ, HT वह परिणाम है जब पहली बार उछालने पर सिक्के पर 'Head' तथा दूसरी बार उछालने पर 'Tail' प्राप्त होता है।] इस प्रकार हम देखते हैं कि कुल 4 सम्भव परिणाम हैं।

उदाहरण 3 : रवि फिल्म देखने जाता है। सिनेमा हॉल के दो प्रवेश द्वार तथा तीन निकास द्वार हैं। रवि कितनी विधियों से हॉल में प्रवेश करके बाहर निकल सकता है? यदि हम प्रवेश द्वारों को I और II से तथा निकास द्वारों को A, B और C से व्यक्त करें तो रवि के लिए कुल संभव चयन IA, IB, IC, II A, II B, II C हैं। [उदाहरणार्थ IC वह चयन है जब रवि प्रवेश द्वार I से प्रवेश करता है तथा निकास द्वार C से बाहर निकलता है।] इस प्रकार हम देखते हैं कि रवि के लिए कुल 6 चयन सम्भव है।

उदाहरण 4 : अंकों 1, 2, 3, 4 तथा 5 से दो अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं? आइए पहले दो अंकों की उन सभी संख्याओं को लिख लें जो दिए हुए अंकों से बनाई जा सकती हैं। इस प्रकार हम 12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45, 51, 21, 31, 41, 32, 42, 52, 43, 53, 54 प्राप्त करते हैं। निस्संदेह हमने यह मान लिया है कि किसी अंक की पुनरावृत्ति नहीं होती। हम देखते हैं कि हम 20 संख्याएँ प्राप्त करते हैं।

उपरोक्त चार उदाहरण एक व्यापक सिद्धान्त, जिसे **गणन का मूलभूत सिद्धान्त** कहा* जाता है, के प्रयोग को दर्शाते हैं। इस सिद्धान्त का कथन निम्न है :

यदि कोई घटना m भिन्न विधियों से घटित हो सकती है तथा इसके घटित होने के पश्चात एक अन्य घटना n भिन्न विधियों से घटित हो सकती है तो दिए हुए क्रम में दोनों घटनाओं के घटित होने की कुल भिन्न विधियाँ $m \times n$ होंगी।** दूसरे शब्दों में, यदि कोई घटना m भिन्न विधियों में से किसी एक से घटित हो सकती है तथा इस घटना के घटित होने के पश्चात् एक अन्य घटना n भिन्न विधियों में से किसी एक से घटित हो सकती है तो दिए हुए क्रम में दोनों घटनाओं के घटित होने की भिन्न विधियाँ $m \times n$ होंगी।

उदाहरण 1 में दिल्ली से टूंडला के दो मार्ग हैं तथा टूंडला से कानपुर का 1 मार्ग है। अतः दिए हुए क्रम में कुल विधियों की संख्या $2 \times 1 = 2$ है।

उदाहरण 2 में पहली बार उछाले जाने पर सिक्के पर या तो 'Head' या 'Tail' आता है। दूसरे शब्दों में, पहली बार उछाले जाने पर सम्भव परिणामों की संख्या 2 है। पहली बार के प्रत्येक परिणाम के तदनुसार दूसरी बार उछालने पर दो सम्भव परिणाम हैं। अतः भिन्न परिणामों की कुल संख्या $2 \times 2 =$ 4 है।

उदाहरण 3 में रवि या तो प्रवेश द्वार *I* या *II* से प्रवेश कर सकता है। प्रवेश के प्रत्येक चयन के

---

*कुछ लेखक इस सिद्धान्त को **गुणन सिद्धांत (multiplication principle)** कहते हैं। परन्तु हम इसके लिए **गणन का मूलभूत सिद्धांत** के नाम का ही प्रयोग करेंगे।

**दो से अधिक घटनाओं के लिए भी यही सिद्धांत सुगमतापूर्वक लागू किया जा सकता है।

तदनुसार रवि के पास बाहर निकलने के तीन चयन हैं। इसके परिणामस्वरूप कुल विधियों की संख्या, जिनसे रवि प्रवेश करके बाहर निकल सकता है, $2 \times 3 = 6$ है।

उदाहरण 4 में क्योंकि हमने कल्पना कर ली है कि अंकों की पुनरावृत्ति नहीं हो सकती, अतः इकाई के स्थान के लिए 5 चयन हैं। 5 अंकों में से किसी भी एक को इकाई के स्थान पर रखा जा सकता है। पुनः इकाई के स्थान के लिए प्रत्येक चयन के तदनुसार हमारे पास दहाई के स्थान के लिए 4 चयन हैं। शेष 4 अंकों में से किसी भी एक को दहाई के स्थान पर रखा जा सकता है। अतः गणन के मूलभूत सिद्धांत का प्रयोग करके दोनों स्थानों को इस विशिष्ट क्रम में $5 \times 4 = 20$ विधियों से भरा जा सकता है।

हम गणन के मूलभूत सिद्धांत के प्रयोग के कुछ अन्य उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 5 : अंकों 1, 2, 3, 4 तथा 5 से दो अंकों की कितनी सम संख्याएँ बनाई जा सकती है ?

हल : आइए मान लें कि अंकों की पुनरावृत्ति हो सकती है। क्योंकि वांछित संख्याएँ सम होनी चाहिए, अतः इस स्थिति में इकाई का अंक 2 अथवा 4 ही होना चाहिए।

अतः हमारे पास इकाई के स्थान के लिए 2 चयन हैं। इकाई के स्थान के लिए प्रत्येक चयन के तदनुसार हम दहाई के स्थान के लिए दिए हुए 5 अंकों में से किसी भी एक का चयन कर सकते हैं। अतः दो अंकों की सम संख्याओं की कुल संख्या $2 \times 5 = 10$ है।

क्या आप इन 10 संख्याओं को लिख सकते हैं ? यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति न हो तो 2 अंकों की सम संख्याओं की संख्या क्या होगी ?

उदाहरण 6 : अंकों 1, 2, 3, 4 तथा 5 से तीन अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि यह मान लिया जाए कि अंकों की पुनरावृत्ति नहीं हो सकती ?

हल : इकाई के स्थान के लिए हमारे पास पाँच अंकों में से किसी भी एक का चयन है। जब हम इसका चयन कर लेते हैं तो हमारे पास केवल चार अंक शेष रहते हैं जिनमें से कोई भी एक दहाई का स्थान ले सकता है। इस प्रकार स्पष्ट है कि सैकड़े के स्थान के लिए हमारे पास केवल 3 चयन हैं। हम इसे निम्न रूप से प्रदर्शित करते हैं :

3	4	5
सै	द	इ

अतः गुणन के मूलभूत सिद्धांत से इस क्रम में तीनों स्थान $5 \times 4 \times 3 = 60$ विधियों से भरे जा सकते हैं।

इस प्रकार दिए हुए 5 अंकों से 3 अंकों की संख्याओं की संख्या 60 है।

[पाठक को चाहिए कि वह उस स्थिति में 3 अंकों की संख्याओं की संख्या निर्धारित करे जबकि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो।]

अब हम देखते हैं कि अरुण ने अपना उत्तर कैसे प्राप्त किया था। पंक्ति में 6 स्थान भरे जाने हैं। 6 बच्चों में से कोई भी एक पहला स्थान ग्रहण कर सकता है। इसके पश्चात् स्थान लेने वाले केवल 5 बच्चे शेष बचते हैं। शेष 5 बच्चों में से कोई भी एक बच्चा पंक्ति में दूसरा स्थान ले सकता है, इत्यादि।

अतः गणन के मूलभूत सिद्धांत द्वारा इस क्रम में 6 स्थान $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ विधियों से भरे जा सकते हैं।

प्रश्नावली 7.1

1. एक सिक्का तीन बार उछाला जाता है तथा परिणामों को लिख लिया जाता है। सम्भव परिणामों की संख्या निर्धारित करने के लिए गणन के मूलभूत सिद्धांत का प्रयोग कीजिए तथा फिर परिणामों की सूची बनाइए।
*2. यदि एक सिक्का चार बार उछाला जाए तो कितने परिणाम सम्भव हैं? पाँच बार उछालने से कितने परिणाम सम्भव हैं? क्या आप अपने उत्तरों मे कोई प्रतिरूप (pattern) देखते हैं ? क्या आप बता सकते हैं कि यदि एक सिक्का n बार उछाला जाए तो कितने परिणाम सम्भव हैं ?
3. किसी परीक्षा में 10 सत्य-असत्य प्रश्न है। उत्तरों के कितने अनुक्रम सम्भव हैं ?
4. एक अलमारी में 4 पुस्तकों, जिनमें भौतिकी, रसायन, जैविकी तथा गणित में से प्रत्येक की एक-एक पुस्तक है, को एक शेल्फ पर कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है ?
5. अंकों 1, 2, 3, 4 तथा 5 से 2—अंकों की कितनी सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति न हो ?
6. अंकों 1, 2, 3, 4 तथा 5 से 3—अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हो ?
7. 5 व्यक्ति 5 नलों से कितनी विधियों से पानी ले सकते हैं यदि किसी भी नल को प्रयोग के बिना न छोड़ा जाए?
8. शब्द 'KNIFE' के अक्षरों से 5 अक्षरों के कितने भिन्न शब्द बनाए जा सकते है यदि अक्षरों की पुनरावृत्ति की अनुमति न हो ?
[शब्दों का शब्द-कोषीय अर्थ हो या न हो।]
9. 12 बच्चे एक दौड़ में भाग लेते हैं। कितनी विधियों से पहले तीन स्थान लिए जा सकते हैं ?
10. भिन्न रंगों के 7 झंडे हैं। इनसे कितने भिन्न सिगनल (संकेत) बनाए जा सकते हैं यदि एक सिगनल में दो झंडों (एक के नीचे एक) के प्रयोग की आवश्यकता पड़ती है ?
11. 1000 तथा 10000 के बीच ऐसे कितने पूर्णांक हैं जिनमें 4, 5 अथवा 6 के अतिरिक्त अन्य कोई अंक न हो ?
12. एक परीक्षा में शुद्ध उत्तर-चयन (multiple choice) के 6 प्रश्न हैं। यदि पहले तीन प्रश्नों में से प्रत्येक के 4 विकल्प तथा अगले तीन प्रश्नों में से प्रत्येक के 5 विकल्प हों तो उत्तरों के कुल कितने अनुक्रम सम्भव हैं ?
13. यदि अंकों की पुनरावृत्ति की अनुमति हैं तो 1, 2, 3, 4, 5 तथा 9 से 3-अंकों की ऐसी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं जिनमें से प्रत्येक 600 से कम हो ?

7.3 एक उपयोगी संकेतन

इससे पहले कि हम क्रमचयों और संचयों की संकल्पनाओं का परिचय दें हम एक उपयोगी संकेतन को सीखेंगे जो प्रथम n प्राकृत संख्याओं के गुणनफल को प्रदर्शित करने के लिए अति सुविधाजनक है। गुणनफल के इस संकेतन* में विस्मय बोधक चिन्ह का प्रयोग होता है, जो गुणनफल में आने वाली सब से बड़ी प्राकृत संख्या के साथ बाईं ओर लगा होता है।

इस प्रकार, $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$

इनमें से प्रत्येक गुणनफल **क्रमगुणित** अर्थात् **फैक्टोरियल (factorial)** कहलाता है। हम 3! को 'तीन फैक्टोरियल' पढ़ते हैं, 5! को "पांच फैक्टोरियल" पढ़ते हैं, इत्यादि। n! को निम्न रूप से परिभाषित करते हैं :

$n! = n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)$ तथा n! को 'n फैक्टोरियल' पढ़ते हैं, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

हम देखते हैं कि $1! = 1$

हम यह भी देखते हैं कि

$$n! = n(n-1)!$$

साथ ही, $n! = n(n-1)\ (n-2)!$

तथा, $n! = n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)!$

हम n पर लगे प्रतिबन्धों का कथन देने की चिंता नहीं करेंगे। हम मान लेते हैं कि जहाँ भी उपरोक्त सम्बन्धों में आने वाले फैक्टोरियल परिभाषित हैं, ये सम्बन्ध लागू रहते हैं।

हम देखेंगे कि 0! को आगे आने वाले परिणामों में प्रयोग करने के लिए $0! = 1$ से परिभाषित करना सुविधाजनक है।

प्रश्नावली 7.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक को गुणनफलों के रूप में लिखिए तथा इनका मान ज्ञात कीजिए :
   (i) 4!   (ii) 2!   (iii) 7!   (iv) 8!
2. $2! + 3!$ को **परिकलित** कीजिए। क्या $2! + 3! = 5!$ है?
3. $(4!)\ (2!)$ को परिकलित कीजिए। क्या $(4!)\ (2!) = 8!$ है?

---

*कुछ लेखक $n!$ के स्थान पर $\underline{|n}$ का प्रयोग करते हैं। परन्तु हम $n!$ के प्रयोग को ही प्राथमिकता देंगे।

4. $\frac{8!}{4!}$ को परिकलित कीजिए। क्या $\frac{8!}{4!} = 2!$ है?

[संकेत : गुणधर्म $n! = n(n-1)!$, इत्यादि का प्रयोग कीजिए।]

5. $(n-r)!$ का मान निकालिए जबकि
   - (i) $n=6,\ r=2$ हो।
   - (ii) $n=9,\ r=5$ हो।

6. $\frac{n!}{(n-r)!}$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि
   - (i) $n=10,\ r=4$ हो।
   - (ii) $n=12,\ r=3$ हो।
   - (iii) $r=1$ हो।
   - (iv) $r=2$ हो।
   - (v) $r=3$ हो।

7. $\frac{n!}{r!\,(n-r)!}$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि
   - (i) $n=6,\ r=2$ हो।
   - (ii) $n=7,\ r=4$ हो।
   - (iii) $n=15,\ r=12$ हो।

*8. सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए

$(2n)! = 2^n\ (n!)\ [1.3.5 \ldots (2n-1)]$ होता है।

[संकेत : $(2n)! = 2n(2n-1)(2n-2)\ldots(3)(2)(1)$]

7.4 क्रमचय

7.4.1 आइए अनुच्छेद 7.2 के उदाहरण 2 पर विचार करें। एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्राप्त परिणाम TH, परिणाम HT से भिन्न है। (क्यों?) दूसरे शब्दों में, H तथा T के घटित होने के क्रम को हमें ध्यान में रखना है। इसी प्रकार, उदाहरणार्थ, उदाहरण 4 में 12, 2-अंकों की एक सम संख्या है। परन्तु यदि हम 1 तथा 2 के घटित होने के क्रम को परस्पर बदल लें तो इस प्रकार प्राप्त संख्या अब 2-अंकों की सम संख्या नहीं होगी।

उन स्थितियों से जिनमें घटनाओं के घटित होने का क्रम महत्वपूर्ण है, क्रमचयों (**permutations**) की प्राप्ति होती है।

कुछ दी हुई वस्तुओं (**objects**) में से एक बार में कुछ को या सभी को लेकर एक निश्चित क्रम में की गई व्यवस्था या विन्यास को क्रमचय (**permutation**) कहा जाता है। अतः उदाहरण 2 में HH, HT, TH तथा TT में से प्रत्येक परिणाम एक क्रमचय है। उदाहरण 3 में प्रत्येक प्रवेश द्वार तथा इसके बाद प्रत्येक निकास द्वार का चयन एक क्रमचय है। उदाहरण 4 में 2-अंकों की प्रत्येक सम संख्या एक क्रमचय है। हम आगे क्रमचयों के कुछ और उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 1 : तीन अक्षरों A, B तथा C के क्रमचयों की संख्या निर्धारित कीजिए। सभी क्रमचयों को लिखिए।

हल : क्योंकि तीनों अक्षरों को व्यवस्थित किया जाना है तथा किसी विशेष व्यवस्था में प्रत्येक अक्षर के घटित होने के क्रम को ध्यान में रखना है, अतः हम प्रत्येक अक्षर के घटित होने के स्थान को पहले, दूसरे तथा तीसरे स्थान से व्यक्त कर सकते हैं।

3	2	1
पहला	दूसरा	तीसरा

अब पहले स्थान में हम या तो A, या B या C को लिख सकते हैं। दूसरे शब्दों में, पहले स्थान में एक अक्षर लिखने के लिए हमारे पास 3 चयन हैं।

दूसरे स्थान के लिए हमारे पास शेष बचे दो अक्षरों में से किसी एक का चयन है। (क्यों ?)

तथा तीसरे स्थान के लिए हमारे पास अंत में बचे एक अक्षर का ही चयन है।

अतः गणन के मूलभूत सिद्धान्त द्वारा हम इस क्रम में तीनों स्थानों को $3\times2\times1 =$ 6 विधियों से भर सकते हैं।

आइए इन छः क्रमचयों को लिखें। ये निम्न हैं :

ABC, ACB, BCA, BAC, CAB तथा CBA

[इस प्रकार शीर्षों A, B तथा C वाले त्रिभुज का नाम उपरोक्त छः विधियों में से किसी एक विधि से लिखा जा सकता है।]

अब हम भिन्न वस्तुओं के एक समुच्चय के क्रमचयों की संख्या निर्धारित करने के लिए दो महत्वपूर्ण प्रमेयों को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 1 : n भिन्न वस्तुओं को एक बार में सभी को लेकर उनके क्रमचयों की संख्या* $P(n, n)$

$$P(n, n) = n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1) = n! \text{ होती है।}$$

उपपत्ति : हम n वस्तुओं को एक पंक्ति में n स्थानों में व्यवस्थित करना चाहते हैं। आइए उनके घटित होने के स्थानों को पहले, दूसरे, तीसरे, . . . , nवें स्थान से व्यक्त करें।

n	$(n-1)$	$(n-2)$	. . .	$[n-(n-1)]$
पहला	दूसरा	तीसरा		nवाँ

अब पहले स्थान के लिए हम n वस्तुओं में से किसी एक का चयन कर सकते हैं। दूसरे शब्दों में हमारे पास पहले स्थान के लिए वस्तुओं के n चयन है।

दूसरे स्थान के लिए केवल $(n-1)$ वस्तुएँ शेष बचती हैं। अतः हमारे पास $(n-1)$ चयन हैं।

इसी प्रकार तीसरे स्थान के लिए $(n-2)$ चयन हैं, इत्यादि।

जिस समय हम nवें स्थान पर पहुँचेंगे हम $n-1$ वस्तुओं का प्रयोग कर चुकेंगे और इसलिए हमारे पास $[n-(n-1)]$ वस्तुएँ शेष बचेंगी। इस प्रकार, nवें स्थान के लिए हमारे पास $[n-(n-1)]$ अर्थात् 1 चयन है।

---

*कुछ अन्य संकेतन जिनका प्रयोग किया जाता है, वे हैं "P_n, ^nP_n", $P_{n,n}$, इत्यादि।

अतः गणन के मूलभूत सिद्धांत द्वारा n भिन्न वस्तुओं को एक बार में सभी को लेकर प्राप्त क्रमचयों की संख्या $P(n, n)$ निम्न गुणनफल है :

$$n(n-1)(n-2)\ldots(3)(2)(1)$$

अर्थात् $P(n, n) = n!$

प्रमेय 2 : n भिन्न वस्तुओं में से एक बार में r $(r \leq n)$ वस्तुएँ लेकर प्राप्त क्रमचयों की संख्या P (n, r)

$$\mathbf{P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}}$$ **होती हैं।**

प्रमेय 2 की उपपत्ति अपेक्षाकृत सरल है। पाठक को चाहिए कि वह प्रमेय 1 की उपपत्ति का अनुसरण करके इसकी उपपत्ति दे। यह दिखाने के लिए कि

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$ है,

हमें केवल गुणनफल के अंश तथा हर को $(n-r)!$ से गुणा करना है। इस प्रकार,

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

परन्तु दक्षिण पक्ष का अंश केवल गुणनफल

$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots(3)(2)(1)$ ही है जो कि निस्सन्देह $n!$ है।

इस प्रकार,

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 2 : राकेश, हरि, करुणा तथा सलीम को, जिन सब की शैक्षणिक योग्यताएँ समान हैं, एक कारखाने में चार पदों पर नियुक्त किया जाना है। उन विधियों की संख्या निर्धारित कीजिए, जिनमें

(i) पहले तथा दूसरे पद भरे जा सकते हैं।
(ii) पहले तीन पद भरे जा सकते हैं।
(iii) सभी चारों पद भरे जा सकते हैं।

हल : (i) पहला पद चारों व्यक्तियों में से किसी एक द्वारा भरा जा सकता है। चारों में से किसी एक का चयन कर लेने के बाद शेष तीन व्यक्ति बचते हैं। इनमें से कोई भी एक दूसरे पद पर नियुक्त किया जा सकता है।
अतः वांछित विधियों की संख्या 4×3 अर्थात् 12 है।

(ii) प्रमेय 2 द्वारा, वांछित विधियों की संख्या
$P(4, 3) = 4 \times 3 \times 2 = 24$ है।

(iii) प्रमेय 1 द्वारा वांछित पदों की संख्या
$P(4, 4) = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ है।

उदाहरण 3 : एक म्यूनिसिपल चुनाव में किसी पद के लिये 6 प्रत्याशी हैं। बैलट (ballot) पर उनके नामों की सूची कितनी विधियों से बनाई जा सकती है।

हल : हम 6 नामों को 6 स्थानों में व्यवस्थित करने की विधियों की संख्या निर्धारित करना चाहते हैं। स्पष्ट रूप से वांछित संख्या

$P(6, 6) = 6! = 720$ है।

इस प्रकार बैलट पर 6 प्रत्याशियों के नाम 720 विधियों से लिखे जा सकते हैं।

***उदाहरण 4 :** 1 से 1000 तक की प्राकृत संख्याओं में कितनी ऐसी हैं जिनके किसी भी अंक की पुनरावृत्ति नहीं होती ?

हल : हमें 1 से 1000 तक की 1-अंक की संख्याओं, 2-अंकों की संख्याओं तथा 3-अंकों की संख्याओं की जाँच करनी है तथा देखना है कि इनमें से कितनी ऐसी हैं जिनके सभी अंक भिन्न हैं।

1-अंक की संख्याओं से कोई समस्या उत्पन्न नहीं होती। स्पष्ट है कि ऐसी 9 संख्याएं हैं और प्रत्येक का अंक भिन्न है।

आइए अब 2-अंकों की उन संख्याओं की संख्या निर्धारित करें जिनके किसी अंक की पुनरावृत्ति नहीं होती। दहाई के स्थान में हम 1, 2, ..., 9 में से कोई भी एक अंक ले सकते हैं। (स्पष्ट है कि हम 0 को दहाई के स्थान पर नहीं ले सकते।) इस प्रकार दहाई के स्थान के लिए कुल $P(9,1)$ अर्थात् 9 चयन है। इकाई के स्थान के लिए हम या तो 1 से 9 तक के शेष 8 अंकों में से कोई भी एक अंक ले सकते हैं (क्योंकि हम अंकों की पुनरावृत्ति करना नहीं चाहते) या अंक 0 ले सकते हैं। इस प्रकार इकाई के स्थान के लिए पुन. $P(9, 1)$ अर्थात 9 चयन हैं। अत: भिन्न अंकों वाली 2-अंकों की संख्याओं की संख्या $9 \times 9 = 81$ है।

इसी प्रकार, हम 3-अंकों की संख्याओं की संख्या निर्धारित कर सकते हैं जिनमें किसी भी अंक की पुनरावृत्ति नहीं होती। यह संख्या

$9 \times 9 \times 8 = 648$ है।

इस प्रकार, 1 से 1000 तक की प्राकृत संख्याओं में कुल $9 + 81 + 648 = 738$ प्राकृत संख्याएँ ऐसी हैं जिनके किसी भी अंक की पुनरावृत्ति नहीं होती।

उदाहरण 5 : n का (के) मान ज्ञात कीजिए ताकि

(i) $P(n, 5) = 42\, P(n, 3)$; $n > 4$

(ii) $30\, P(n, 6) = P(n+2, 7)$; $n \geq 6$

हल : (i) हमें दिया है कि

$$P(n, 5) = 42\, P(n, 3)$$

अर्थात्, $$\frac{n!}{(n-5)!} = 42\left[\frac{n!}{(n-3)!}\right]$$

इस प्रकार, $$\frac{(n-3)!}{(n-5)!} = 42$$

अर्थात्, $$(n-3)(n-4) = 42$$

अथवा $$n^2 - 7n - 30 = 0$$

जिससे, $$n = 10, -3$$

स्पष्ट है कि n ऋणात्मक नहीं हो सकता। इस प्रकार n का वांछित मान 10 है।

(ii) हमें दिया है कि

$$30\ P(n, 6) = P(n+2, 7)$$

अर्थात्, $$30\left[\frac{n!}{(n-6)!}\right] = \frac{(n+2)!}{(n-5)!}$$

इस प्रकार; $$\frac{30\ (n-5)!}{(n-6)!} = \frac{(n+2)!}{n!}$$

अर्थात्, $$30(n-5) = (n+2)(n+1)$$

अथवा, $$n^2 - 27n + 152 = 0$$

जिससे, $$n = 8 \text{ या } 19$$

इस प्रकार, n के वांछित मान 8 तथा 19 हैं।

7.4.2 क्रमचय जब कि कुछ वस्तुएँ एक सी हों

17वीं शताब्दी से पहले किसी पुस्तक के छपने में प्रायः अनेक वर्ष लगते थे। साथ ही, उस समय इतनी पत्रिकाएँ भी नहीं होती थीं जिनमें शोधकर्ता अपने परिणाम प्रकाशित करा सकते। अतः अधिकतर शोध परिणामों को निजी पत्रों द्वारा अपने साथियों तक पहुँचाया जाता था। परन्तु इससे शोधकर्ता को क्षति पहुँचने की सम्भावना बनी रही तथा 17वीं शताब्दी के अंत में हमने शोध की प्राथमिकता के विषय में उठने वाले अनेकों विवादों के विषय में पढ़ा।

इस प्रकार की क्षति की रोकथाम के लिए शोधकर्ताओं ने सूचना संचार की एक ऐसी पद्धति का 'आविष्कार' किया जिसमें वे अक्षरों का स्थान परिवर्तन करके वाक्यों का प्रयोग करते थे। इस प्रकार बने नये वाक्यों को **वर्ण विपर्यास (anagrams)** कहा जाता है। उदाहरणार्थ, शब्द **luccalus**, **calculus** शब्द का एक वर्ण विपर्यास है।

जब **क्रिस्चियन हाइगन्ज** (1629-1695) ने शनि-वलय (Saturn's ring) की खोज की तो उसने निम्नलिखित वर्ण- वपर्यास की रचना की :

aaaaaaa, ccccc, d, eeeee, g, h, iiiiiii, lll, mm, nnnnnnnnn, oooo, pp, q, rr, s, ttttt, uuuuu

जिसका यदि उचित क्रम में व्यवस्थित करके अंग्रेजी में अनुवाद किया जाए तो इसका अर्थ निम्न है :

"Surrounded by a thin flat ring not suspended anywhere, inclined to the ecliptic."

उपर्युक्त का हिन्दी अनुवाद निम्न है :

"एक पतले चपटे वलय (ring) से घिरा हुआ, किसी ओर लटका हुआ नहीं तथा रविमार्ग (ecliptic) की ओर झुका हुआ"।

वर्ण विपर्यासों के अवकूटन (decoding) करने में उन्हें विभिन्न क्रमों में पुनः व्यवस्थित करना सम्बद्ध होता है।

इससे हमें n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या के विषय में सीखने की प्रेरणा मिलती है, जबकि उनमें से कुछ वस्तुएँ एक सी हों।

आइए, उदाहरणार्थ A, A तथा C तीनों अक्षरों को एक बार में एक साथ लेकर प्राप्त क्रमचयों पर विचार करें। आइए सभी सम्भव क्रमचयों को लिखें। हम निम्न प्राप्त करते हैं :

AAC, ACA, CAA

[आपको याद होगा कि यदि तीनों वस्तुएँ भिन्न-भिन्न हों तो क्रमचयों की संख्या $P(3, 3) = 3!$ होगी।]

आइए अब A, A, C तथा D अक्षरों के क्रमचयों पर विचार करें। हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$AACD$, $AADC$, $ACDA$, $ACAD$, $ADAC$, $ADCA$, $CAAD$, $CADA$, $CDAA$, $DAAC$, $DACA$, $DCAA$

[आपको याद होगा कि यदि चारों वस्तुएँ भिन्न-भिन्न हों तो क्रमचयों की संख्या $P(4, 4) = 4!$ होगी।]

अब हम n वतुस्ओं, जिनमें से कुछ एक सी हैं, के क्रमचयों की संख्या निर्धारित करने के लिए एक महत्वपूर्ण प्रमेय सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 3 : **n वस्तुओं, जिनमें m वस्तुएँ, एक प्रकार की तथा $(n-m)$ दूसरी प्रकार की हैं, को एक बार में एक साथ लेकर प्राप्त क्रमचयों की संख्या** $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ **होती है।**

उपपत्ति : आइए क्रमचयों की वाँछित संख्या को, उदाहरणार्थ, x से व्यक्त करें।

आइए इन x क्रमचयों में से एक विशेष क्रमचय उदाहरणार्थ, वह क्रमचय लें जिसमें एक प्रकार की m वस्तुएँ एक साथ ली गई हैं तथा इनके पश्चात् दूसरी प्रकार की $(n-m)$ वस्तुएँ एक साथ ली गई हैं।

$\underline{1}$ $\underline{2}$ $\underline{\ldots}$ $\underline{m}$ $\underline{m+1}$ $\underline{m+2}$ $\underline{m+3}$ $\underline{\ldots}$ $\underline{n}$

एक प्रकार की ... दूसरी प्रकार की

← m वस्तुएँ → ← $(n-m)$ वस्तुएँ →

आइए अब मान लें कि इन m वस्तुओं में से सभी परस्पर भिन्न हैं तथा शेष $(n-m)$ वस्तुओं से भी भिन्न हैं। इन m वस्तुओं को एक बार में एक साथ लेकर प्राप्त क्रमचयों की संख्या $P(m, m) = m!$ है।

इसी प्रकार, यदि $(n-m)$ वस्तुओं में से प्रत्येक को दूसरी से भिन्न मान लिया जाए तथा इनको m वस्तुओं से भी भिन्न मान लिया जाए तो इन $(n-m)$ वस्तुओं को एक बार में एक साथ लेकर प्राप्त क्रमचयों की संख्या $P(n-m, n-m) = (n-m)!$ होगी।

अतः मूलभूत सिद्धान्त द्वारा, x क्रमचयों में से इस एक विशेष क्रमचय से $m!\ (n-m)!$ क्रमचय प्राप्त होते हैं, जबकि सभी वस्तुएँ भिन्न हैं।

यह स्पष्ट है कि यदि एक प्रकार की m वस्तुएँ तथा दूसरी प्रकार की $n-m$ वस्तुएँ एक साथ व्यवस्थित न भी हों जैसा कि ऊपर दर्शाया गया है तो भी ज्यों ही हम इन्हें भिन्न मान लेते हैं तो एक विशेष प्रकार की वस्तुओं को उन्हीं द्वारा पहले ही घेरे गए स्थानों में पुनः व्यवस्थित करने पर हम $m!\ (n-m)!$ क्रमचय प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार, हम x क्रमचयों से कुल $x\ (m\ !)\ (n-m)\ !$ क्रमचयों को प्राप्त होते हैं, यदि सभी n वस्तुएँ भिन्न हों।

परन्तु यदि सभी n वस्तुएँ भिन्न हों, तो क्रमचयों की संख्या $P\ (n, n) = n\ !$ होती है।

इस प्रकार, $x\ (m\ !)\ (n-m)\ ! = n\ !$

जिससे, $x = \dfrac{n\ !}{m\ !\ (n-m)\ !}$

आइए, अक्षरों A, A तथा C के क्रमचयों के उदाहरण पर वापिस आ जाएँ। यहाँ, $n=3$, $m=2$ है। इस प्रकार, $(n-m) = 1$

अत:, $x = \dfrac{3\ !}{2\ !\ \ 1\ !} = 3$

क्या आप बता सकते हैं कि n वस्तुओं, जिनमें p वस्तुएँ एक प्रकार की, q वस्तुएँ दूसरी प्रकार की तथा शेष $(n-p-q)$ वस्तुएँ एक अन्य प्रकार की हैं, के क्रमचयों की संख्या क्या होगी ? वाँछित संख्या

$\dfrac{n\ !}{p\ !\ q\ !\ (n-p-q)\ !}$ होगी।

[पाठक को चाहिए कि वह प्रमेय 3 के आधार पर उपरोक्त की उपपत्ति दे। पाठक इस का आगे व्यापकीकरण भी करे।]

आइए, अक्षरों A, A, C तथा D के क्रमचयों के उदाहरण पर पुन: विचार करें। यहाँ $n = 4$, $p = 2$, $q = 1$ हैं। इस प्रकार, $(n-p-q) = 1$

अत: क्रमचयों की वाँछित संख्या

$\dfrac{4\ !}{2\ !\ \ 1\ !\ \ 1\ !} = 12$ है।

आइए हाइगन्ज के वर्ण विपर्यास के क्रमचयों की संख्या परिकलित करें। इसमें 61 अक्षर हैं जिनमें $7a$, $5c$, $1d$, $5e$, $1g$, $1h$, $7i$, $3l$, $2m$, $9n$, $4o$, $2p$, $1q$, $2r$, $1s$, $5t$ तथा $5u$ हैं। इस प्रकार क्रमचयों की संख्या

$$\frac{61\ !}{7!\ \ 5!\ \ 1!\ \ 5!\ \ 1!\ \ 1!\ \ 7!\ \ 3!\ \ 2!\ \ 9!\ \ 4!\ \ 2!\ \ 1!\ \ 2!\ \ 1!\ \ 5!\ \ 5!}$$

है जोकि एक बहुत बड़ी संख्या है जिसे परिकलित करने का प्रयत्न करने के लिए हम पाठक को नहीं कहेंगे। यह जानना सुखकर है कि इस वर्ण विपर्यास का कूटवाचन (decode) करने के लिए शोधकर्ता अपनी सहज बुद्धि का प्रयोग करता है तथा केवल वही क्रमचय लेता है जो कि 'व्यावहारिक' हैं।

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 6 : शब्द 'EATERANTEATER' के अक्षर कितनी भिन्न विधियों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं?

हल : इस शब्द में 13 अक्षर हैं जिनमे 4E, 3A, 3T, 2R तथा 1N है। इस प्रकार सभी सम्भव भिन्न व्यवस्थाओं की संख्या

$\dfrac{13\ !}{4!\ \ 3!\ \ 3!\ \ 2!\ \ 1!} = 3603600$ है।

उदाहरण 7 : एक बैग में 5 लाल, 4 सफेद तथा 3 नीले संगमरमर के टुकड़े हैं। उन्हें एक-एक करके निकाला जाता है तथा एक पंक्ति में लगाया जाता है। यह मानकर कि सभी 12 टुकड़े निकाल लिए जाते हैं, भिन्न व्यवस्थाओं की संख्या निर्धारित कीजिए।

हल : यहाँ $n=12$, $p=5$, $q=4$ तथा $(n-p-q)=3$ है।

अतः वाँछित संख्या $\dfrac{12!}{5!\ 4!\ 3!}=27720$ है।

उदाहरण 8 : बीसवीं शताब्दी की जैविकी की एक महत्वपूर्ण उपलब्धि यह है कि जीव वैज्ञानिक 'अनुवंशिक कूट' (genetic code) को तोड़ सकने में समर्थ हो गए हैं। क्योंकि अब वे यह निर्धारित कर सकते हैं कि किसी जीव के जीन अगले वंश तक किस प्रकार पहुँच जाते हैं।

इन जीनों में डेसॉक्सीरिबोनुक्लेइक एसिड (DNA) के बहुत भारी अणु होते हैं जो स्वयं 4 प्रकार के छोटे अणुओं की रैखिक शृंखलाओं में होते हैं। ये 4 प्रकार निम्न हैं ऐडेनीन (A), साइटोसिन (C)-ग्वानीन (G) तथा थायमीन (T)।

एक शृंखला में 12 अणुओं की भिन्न व्यवस्थाओं की संख्या निर्धारित कीजिए, यदि शृंखला में A, C, G तथा T में से प्रत्येक के तीन-तीन अणु हों।

हल : यहाँ $n=12$ है। प्रत्येक छोटे अणु A, C, G तथा T के तीन एक जैसे अणु हैं।
इस प्रकार, शृंखला में व्यवस्थाओं की वाँछित संख्या

$$\frac{12\,!}{3\,!\ 3\,!\ 3\,!\ 3\,!}=369600 \text{ है।}$$

उदाहरण 9 : छः एक जैसे सिक्कों को एक पंक्ति में व्यवस्थित किया जाता है। 4 heads तथा 2 tails प्राप्त करने की विधियों की संख्या निर्धारित कीजिए।

हल : हम 6 वस्तुओं को, जिनमें 4 एक प्रकार की (heads) तथा 2 अन्य प्रकार की (tails) हैं, व्यवस्थित करना चाहते हैं। अतः वाँछित विधियों की संख्या

$$\frac{6\,!}{4\,!\ 2\,!}=15 \text{ है।}$$

प्रश्नावली 7.3

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $P(10, 3)$ (ii) $P(9, 5)$
   (iii) $P(20, 4)$ (iv) $P(75, 2)$

2. सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए
$P(n, n) = P(n, n-1)$

3. रेनु अर्थशास्त्र की 3, इतिहास की 2 तथा भाषा की 4 पुस्तकों को अलमारी में व्यवस्थित करना चाहती है। निम्नलिखित को निर्धारित कीजिए :
(क) सभी सम्भव विन्यासों की संख्या।
(ख) सभी सम्भव विन्यासों की संख्या, यदि एक विषय की सभी पुस्तकें एक साथ रहें।

4. शब्द 'EQUATION' के अक्षरों से बने 5-अक्षरों के भिन्न शब्दों की संख्या निर्धारित कीजिए।

5. दिखाइए कि 1000 से 10000 के बीच कुल 4536 ऐसी संख्याएँ हैं जिनके किसी भी अंक की पुनरावृत्ति नहीं होती। इन में से कितनी संख्याएं विषम संख्याएं हैं ?

6. शब्द 'EQUATION' के अक्षरों से बने 8-अक्षरों के भिन्न शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए, यदि प्रत्येक शब्द एक स्वर (vowel) से आरम्भ होता हो।

7. 8 विद्यार्थियों को एक परीक्षा में बैठना है जिनमें से 3 विद्यार्थियों को गणित में तथा शेष 5 विद्यार्थियों को अन्य विषयों में परीक्षा देनी है। उन्हें एक पंक्ति में कितनी विधियों से बैठाया जा सकता है यदि गणित के परीक्षार्थी एक दूसरे के साथ नहीं बैठ सकते हैं ?

8. 4 लड़कों तथा 3 लड़कियों को एक पंक्ति में 7 कुर्सियों पर कितनी विधियों से बैठाया जा सकता है यदि दो लड़के या दो लड़कियां एक साथ न बैठ सकें ?

*9. दिल्ली में पंजीकृत गाड़ियों की लाइसेन्स प्लेटों पर (अंग्रेजी वर्णमाला) के तीन अक्षर, तथा उनके बाद 1, 2, 3, अथवा 4 अंक लिखे होते हैं। बाईं ओर का पहला अक्षर '*D*' ही हो सकता है। 1-अंक की संख्या में 0 की अनुमति नहीं है। निस्संदेह, अंकों की पुनरावृत्ति हो सकती है। लाइसेंस प्लेटों की सम्भव संख्या निर्धारित कीजिए।

10. एक जलपानगृह में खाने की वस्तुओं की सूची (menu) में 5 सब्जियां, 3 मीट (meat), 2 सलाद तथा 4 ब्रेड लिखी हुई हैं। एक ग्राहक कितनी विधियों से अपने खाने का चयन कर सकता है यदि वह 1 मीट, 1 सब्जी, 1 सलाद तथा 1 ब्रेड चुने ?

11. एक सिनेमा हॉल की टिकट खिड़की पर 10 व्यक्ति कितनी विधियों से पंक्ति बना सकते हैं ?

12. अंकों 1, 2, 0, 2, 4, 2 तथा 4 से 7-अंकों वाली कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं ?

13. 6 लड़कों तथा 5 लड़कियों को एक ग्रुप फोटो के लिए कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है यदि लड़कियों को एक पंक्ति में कुर्सियों पर बैठना है तथा लड़कों को एक पंक्ति में उनके पीछे खड़े होना है ?

14. अंकों 4, 2, 5, 0, 6 तथा 7 से 6-अंकों की कितनी भिन्न संख्याएँ बनाई जा सकती हैं ? (मान लीजिए कि अंकों की पुनरावृत्ति नहीं हो सकती।) इनमें से कितनी संख्याओं के दहाई के स्थान में अंक 0 होगा ?

15. अंकों 1, 2, 3, 4 तथा 5 से कितनी भिन्न संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि यह मान

लिया जाए कि संख्याओं में अंकों की पुनरावृत्ति नहीं हो सकती ? इनमें से कितनी संख्याएँ सम होंगी ?

16. अंकों 0, 1, 2, 3, 4, 5 तथा 6 से 100 से 1000 के बीच कितनी भिन्न संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि यह मान लिया जाए कि किसी संख्या में अंकों की पुनरावृत्ति नहीं हो सकती ? इनमें से कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य होंगी ?

17. n ज्ञात कीजिए यदि

(i) $P(n, 6)=3P(n, 5)$ (ii) $P(n, 4)=20P(n, 2)$

(iii) $2P(n, 3)=P(n+1, 3)$

18. r ज्ञात कीजिए यदि

(i) $P(10, r)=2P(9, r)$ (ii) $5P(4, r)=6P(5, r-1), r\geqslant 1$

(iii) $4P(6, r)=P(6, r+1)$

19. सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं n तथा r के लिए, जिन के लिए संकेत परिभाषित हैं,

$P(n,r)=P(n-1,r)+r\,P(n-1, r-1)$ होता है ।

20. शब्द 'KURUKSHETRA' के अक्षर कितनी भिन्न विधियों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं ?

21. तार के संदेशों* में मौर्स कोड (**Morse Code**) का प्रयोग किया जाता है। इस कोड में अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों, संख्याओं तथा मात्रा चिन्हों (punctuation marks) को बिन्दुओं (.) तथा डैशों (—) से दर्शाया जाता है। उदाहरणार्थ, अक्षर E को एक बिन्दु द्वारा तथा अक्षर T को एक डैश द्वारा दर्शाया जाता है। अन्य अक्षरों को 2 या अधिक संकेतों से दर्शाया जाता है ।

(क) दो चिन्हों, उदाहरणार्थ, .., .— , इत्यादि के प्रयोग से कितने अक्षरों को दर्शाया जा सकता है ?

(ख) तीन चिन्हों, उदाहरणार्थ, ..., .—. इत्यादि के प्रयोग से कितने अक्षरों को दर्शाया जा सकता है ?

(ग) दिखाइए कि अंग्रेजी वर्णमाला के प्रत्येक अक्षर को 4 या इससे कम संकेतों के प्रयोग से दर्शाना सम्भव है ।

टिप्पणी : 26 अक्षरों के अतिरिक्त हमें 0 से 9 तक के 10 अंकों तथा मात्रा चिन्हों को भी संदेश रूप में भेजने की आवश्यकता होती है। अतः तार के संदेशों के लिए 5 या इससे कम संकेतों के अनुक्रमों की आवश्यकता होती है ।

22. तीन एक जैसे सिक्के एक पंक्ति में व्यवस्थित किए जाते हैं। उन विधियों की संख्या निर्धारित कीजिए जिसमें 0 heads तथा 3 tails प्राप्त हों। साथ ही 1 head तथा 2

---

*मौर्स कोड (जिसे मौर्स वर्णमाला भी कहते हैं) की खोज एक अमरीकी सेम्यूअल एफ० बी० मौर्स (1791-1872) ने की थी।

tails प्राप्त करने की विधियों की संख्या निर्धारित कीजिए, इत्यादि ।

इस प्रकार निम्न सारणी को पूर्ण कीजिए :

3 सिक्कों को व्यवस्थित करने से प्राप्त heads की संख्या	0	1	2	3
विधियों की संख्या				

टिप्पणी : सारणी में दूसरी पंक्ति की संख्याओं का जोड़ $8=2^3$ होना चाहिए ।

23. चार एक जैसे सिक्के एक पंक्ति में व्यवस्थित किए गए हैं । उन विधियों की संख्या निर्धारित कीजिए जिनमें 0 heads प्राप्त होते हैं । साथ ही, 1 head प्राप्त करने की विधियों की संख्या निर्धारित कीजिए, इत्यादि ।
इस प्रकार निम्न सारणी को पूर्ण कीजिए :

4 सिक्कों को व्यवस्थित करने से प्राप्त heads की संख्या	0	1	2	3	4
विधियों की संख्या					

टिप्पणी : सारणी में दूसरी पंक्ति की संख्याओं का जोड़ $16=2^4$ होना चाहिए ।

24. एक खम्भे (pole) पर 3 लाल, 2 पीले तथा 2 हरे झंडों को व्यवस्थित करके कितने भिन्न संकेत भेजे जा सकते हैं ?
(मान लीजिए कि एक संकेत को भेजने में सभी सातों झंडों का प्रयोग होता है ।)

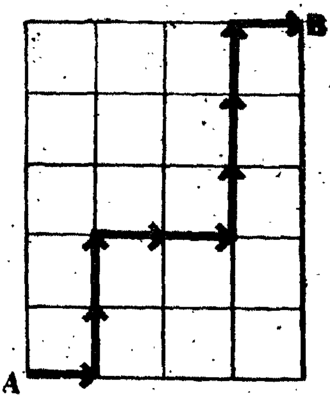
25. कितनी विधियों से दो 10-पैसे के, दो 20-पैसे के, तीन 25-पैसे के तथा एक 50-पैसा का सिक्का 8 बच्चों में इस प्रकार विभाजित किए जा सकते हैं, कि प्रत्येक बच्चे को केवल एक ही सिक्का प्राप्त हो ?

26. अंकों 1, 2, 5, 5 तथा 4 का प्रयोग करके 5-अंकों की कितनी सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं ?

27. **ग्रिड-समस्या :** एक व्यक्ति को A से चलकर B तक जाना है । परन्तु उस पर यह प्रतिबन्ध है, कि वह A के केवल बाईं ओर या A के ऊपर की ओर ही चल सकता है, परन्तु यह आवश्यक नहीं कि वह इसी क्रम से चले । उसका ऐसा एक पथ आकृति 7.2

में दर्शाया गया है। A से B तक के पथों की संख्या निर्धारित कीजिए।

[संकेत : वह व्यक्ति चाहे कोई भी पथ चुने, उसे 4 बार दाईं ओर तथा 5 बार ऊपर की ओर चलना होगा।]



आकृति 7.2: 4×5 ग्रिड

7.5 संचय

आपको याद होगा कि n वस्तुओं को व्यवस्थित करने में किसी क्रमचय में वस्तुओं के घटित होने का क्रम महत्त्वपूर्ण होता है। अब हम गिनने की उन समस्याओं पर विचार करते हैं जहाँ घटित होने का क्रम महत्वपूर्ण नहीं होता। आइए उदाहरणार्थ, चार में से दो व्यक्तियों को 'चुनने' की विधियों की संख्या निर्धारित करें। आइए चारों व्यक्तियों को A, B, C तथा D से व्यक्त करें। हम पहले से ही जानते हैं कि 4 वस्तुओं में से एक बार में 2 को लेने से प्राप्त क्रमचयों की संख्या $P(4, 2) = 12$ होती है। ये क्रमचय निम्न हैं :

AB, AC, AD, BC, BD, CD, BA, CA, DA, CB, DB तथा DC

परन्तु यदि घटित होने के क्रम का कोई महत्व नहीं हो तो AB तथा BA समान हैं। इसी प्रकार AC तथा CA समान हैं, इत्यादि। इस प्रकार हम 4 में से 2 व्यक्तियों को निम्नलिखित विधियों से चुन सकते हैं :

AB, AC, AD, BC, BD तथा CD

हम देखते हैं कि 4 में से 2 व्यक्तियों को चुनने की 6 विधियाँ हैं।

उन स्थितियों से, जिनमें वस्तुओं के एक दिए हुए समुच्चय में से एक उपसमुच्चय को चुना जाना होता है, संचयों (**Combinations**) की प्राप्ति होती है।

दी हुई भिन्न वस्तुओं में से सभी या कुछ वस्तुओं के चुनने को संचय कहा जाता है। एक संचय में वस्तुओं के चुनने का क्रम महत्वपूर्ण नहीं होता।

हम नीचे n भिन्न वस्तुओं में से एक बार में r वस्तुएँ लेकर संचयों की संख्या निर्धारित करने के लिए एक सूत्र देते रहे हैं।

प्रमेय 4 : n भिन्न वस्तुओं में से एक बार में r वस्तुएँ लेकर संचयों की संख्या* $C(n, r)$, $C(n, r) = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ होती है, जहाँ $r \leqslant n$।

उपपत्ति : आपको याद होगा कि n भिन्न वस्तुओं में से एक बार में r, $(1 \leqslant r \leqslant n)$ वस्तुएँ लेकर प्राप्त

क्रमचयों की संख्या $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ होती है।

---

* $C(n, r)$ के लिए अन्य संकेतन ${}^{n}C_r$; C^{n}_{r}; $C_{n,r}$; $\binom{n}{r}$ हैं।

क्योंकि वस्तुओं के व्यवस्थितिकरण के क्रम का महत्व नहीं है, अतः यह स्पष्ट है कि r वस्तुओं के प्रत्येक संचय के लिए $P(r,r)=r\,!$ विन्यास हैं। दूसरे शब्दों में,

$$P(n,r)=r\,!\;C(n,r)$$

इस प्रकार, $C(n,r)=\dfrac{P(n,r)}{r\,!}=\dfrac{n\,!}{r\,!\,(n-r)!}$

अतः n भिन्न वस्तुओं में से एक बार में r वस्तुएँ लेकर प्राप्त संचयों की संख्या

$C(n,r)=\dfrac{n\,!}{n\,!\,(n-r)\,!}$ होती है जहाँ $r\leqslant n$ है।

टिप्पणी 1 : स्पष्ट है कि n वस्तुओं को एक बार में सभी को लेकर संचयों की संख्या 1 है। इसकी जाँच प्रमेय 4 द्वारा भी, जब $r=n$ हो, की जा सकती है।

जब $r=n$ है तो

$$C(n,\ n)=\frac{n\,!}{n\,!\,(n-n)\,!} \qquad (1)$$

हम पहले ही परिभाषित कर चुके हैं कि $0!\ =1$ ।

इस प्रकार, सरल करने पर (1) से हम $\mathbf{C\ (n,\ n)=1}$ प्राप्त करते हैं।

टिप्पणी 2 : दी हुई n भिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं के चुनने के बाद प्रत्येक बार हमारे पास शेष $(n-r)$ वस्तुएँ बच रहती हैं। अतः यह स्पष्ट है कि n भिन्न वस्तुओं में से एक बार में r वस्तुओं को लेकर प्राप्त संचयों की संख्या n भिन्न वस्तुओं में से एक बार में $(n-r)$ वस्तुएँ लेकर प्राप्त संचयों की संख्या के समान होती है। दूसरे शब्दों में,

$$\mathbf{C(n,\ r)=C(n,\ n-r)}$$

[पाठक को चाहिए कि वह $C(n,\ r)$ के लिए सूत्र का प्रयोग करके उपरोक्त गुणधर्म को सिद्ध करे।]

टिप्पणी 3 : n वस्तुओं में से एक बार में किसी को भी न लेकर संचयों की संख्या भी 1 है। स्पष्ट है कि जब हम किसी वस्तु का चयन नहीं करते तो ऐसा करना सभी n वस्तुओं को शेष छोड़ने के समान है तथा हम यह जानते हैं कि ऐसा करने की केवल एक विधि है। इस प्रकार,

$$\mathbf{C(n,\ 0)=1.}$$

अतः प्रमेय 4 तब भी लागू रहती है जब कि $r=0$ हो।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : मान ज्ञात कीजिए :

(i) $C(10,\ 4)$ (ii) $C(12,7)$
(iii) $C(6,\ 6)$ (iv) $C(9,\ 0)$

हल :

(i) $C(10,\ 4)=\dfrac{10\,!}{4\,!\,(10-4)\,!}=\dfrac{10\,!}{4\,!\,6\,!}=\dfrac{10\times9\times8\times7\times6\,!}{4\times3\times2\times1\times6\,!}=210$

(ii) $C(12, 7) = \frac{12!}{7!\,5!} = \frac{12\times11\times10\times9\times8\times7!}{5\times4\times3\times2\times1\times7!} = 792$

(iii) $C(6, 6) = \frac{6!}{6!\,0!} = 1$

(iv) $C(9, 0) = \frac{9!}{0!\,9!} = 1$

उदाहरण 2 : एक विद्यालय में बैडमिंटन के 5 'अच्छे' खिलाड़ी हैं। अन्तर-स्कूल टूर्नामेन्ट के लिए 4 खिलाड़ियों की एक टीम को भेजा जाना है। टीम को कितनी विधियों से चुना जा सकता है ?

हल : हम 5 में से 4 खिलाड़ियों को चुनने की विधियों की संख्या का निर्धारण करना चाहते हैं। प्रमेय 4 का प्रयोग करके हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$C(5, 4) = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$$

[आइए बैडमिंटन के 5 'अच्छे' खिलाड़ियों को A, B, C, D तथा E से व्यक्त करें। इन खिलाड़ियों में से 4 खिलाड़ियों की निम्न भिन्न टीमें बनाई जा सकती हैं :

$ABCD$, $ABCE$, $ABDE$, $ACDE$ तथा $BCDE$]

उदाहरण 3 : 5 लड़कों तथा 4 लड़कियों में से 3 लड़कों तथा 3 लड़कियों की एक टीम को कितनी विधियों से चुना जा सकता है ?

हल : 5 में से 3 लड़कों को चुनने की विधियों की संख्या $C(5, 3) = 10$ है। (क्यों ?) 4 में से 3 लड़कियों को चुनने की विधियों की संख्या $C(4, 3) = 4$ है।

अतः मूलभूत सिद्धांत द्वारा वाँछित विधियों की संख्या $10 \times 4 = 40$ है।

उदाहरण 4 : एक वृत्त के 6 बिन्दुओं से होकर कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं ?

हल : क्योंकि दो बिन्दुओं से केवल एक रेखा खींची जा सकती है, अतः वृत्त के 6 बिन्दुओं से खींची जा सकने वाली रेखाओं की संख्या :

$$C(6, 2) = \frac{6!}{2!\,4!} = 15 \text{ है।}$$

[पाठक को चाहिए कि वृत्त के n बिन्दुओं के लिए इस समस्या का व्यापकीकरण करें।]

उदाहरण 5 : ताश के 52 पत्तों की गड्डी में से 5-पत्तों के संचयों की संख्या निर्धारित कीजिए।

हल : 5-पत्तों के संचयों की संख्या निम्न है :

$$C(52, 5) = \frac{52!}{5!\,47!} = \frac{52\times51\times50\times49\times48}{5\times4\times3\times2\times1} = 2598960$$

उदाहरण 6 : जाँच कीजिए कि

$$C(8, 4) + C(8, 3) = C(9, 4)$$

हल : $C(8, 4)=\frac{8!}{4!\ 4!}=70$

$$C(8, 3)=\frac{8!}{3!\ 5!}=56$$

इस प्रकार, $C(8, 4)+C(8, 3)=70+56=126$

अब, $C(9, 4)=\frac{9!}{4!\ 5!}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}$

$$=126$$

अतः हम देखते है कि

$$C(8,4) + C(8, 3) = C(9, 4)$$

अब हम $C(n, r)$ के एक महत्वपूर्ण गुणधर्म को सिद्ध करते हैं, जो संचयों के गणित के अध्ययन में बहुत उपयोगी है।

प्रमेय 5 : यदि n तथा r इस प्रकार की प्राकृत संख्याएँ हैं कि $1 \leqslant r \leqslant n$, तो

$$\mathbf{C(n, r) + C(n, r-1) = C(n+1, r)}$$

उपपत्ति : इसकी उपपत्ति अति सरल है। हम वाम पक्ष लेते हैं तथा $C(n, r)$ की परिभाषा का प्रयोग करते हैं। इस प्रकार हम निम्न प्राप्त करते हैं।

$$C(n, r) + C(n, r-1) = \frac{n!}{r!\ (n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\ (n-r+1)!} \tag{1}$$

आपको याद होगा कि $r! = r\,(r-1)!$

तथा $(n-r+1)! = (n-r+1)\,(n-r)!$

इस प्रकार, (1) से

$$C(n, r)+C(n, r-1)=n!\left[\frac{1}{r(r-1)!\ (n-r)!}+\frac{1}{(r-1)!\ (n-r+1)\ (n-r)!}\right]$$

$$=n!\left[\frac{n-r+1+r}{r(r-1)!\ (n-r+1)\ (n-r)!}\right]$$

$$=n!\left[\frac{n+1}{r!\ (n-r+1)!}\right]$$

$$=\frac{(n+1)!}{r!\ (n-r+1)!}=C(n+1, r)$$

अतः, $C(n, r) + C(n, r-1) = C(n+\ , r)$

अब हम इसके लिए एक वैकल्पिक उपपत्ति देते हैं जो संचयों से सम्बन्धित तर्कों पर आधारित है। वास्तव में कुछ लेखक इसे **संचयों के गणित की उपपत्ति (combinatorial proof)** तक कह देते हैं।

आपको याद होगा कि $(n+1)$ वस्तुओं में से एक बार में r वस्तुओं को लेकर संचयों की संख्या $C\ (n+1, r)$ होती है।

आइए, दी हुई $(n+1)$ भिन्न वस्तुओं में से किसी एक वस्तु पर ध्यान केन्द्रित करें। मान लीजिए हम इसे, उदाहरणार्थ, S से व्यक्त करते हैं। स्पष्ट रूप से दो सम्भावनाएँ (possibilities) हैं।

(P1) यह विशिष्ट वस्तु S चयन में सम्मिलित है।

(P2) S चयन में सम्मिलित नहीं है।

सम्भावना $P1$ के लिए, जबकि S चयन में सम्मिलित है, शेष $(r-1)$ वस्तुएँ शेष बची $(n+1)-1 = n$ वस्तुओं में से चुनी जानी चाहिए। ऐसा $C(n, r-1)$ विधियों से किया जा सकता है।

सम्भावना $P2$ के लिए, जबकि S चयन में सम्मिलित नहीं है, स्पष्ट है कि r वस्तुएँ शेष बची $(n+1)-1 = n$ वस्तुओं में से चुनी जानी चाहिए। निस्संदेह ऐसा $C(n, r)$ विधियों से किया जा सकता है।

इस प्रकार $(n+1)$ भिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को चुनने की कुल विधियों की संख्या

$$C(n, r-1) + C(n, r) \text{ है।}$$

अर्थात्,
$$C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1)$$

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 7 : निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(*i*) $C(10, 4) + C(10, 5)$

(*ii*) $C(61, 57) - C(60, 56)$

हल : (*i*) हम प्रमेय 5 का प्रयोग करके निम्न प्राप्त करते हैं :

$$C(10, 4) + C(10, 5) = C(11, 5)$$
$$= \frac{11!}{5!\ 6!} = 462$$

(*ii*) पुन: हम प्रमेय 5 का प्रयोग करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$C(60, 56) + C(60, 57) = C(61, 57)$$

इस प्रकार, $C(61, 57) - C(60, 56) = C(60, 57)$

$$= \frac{60!}{57!\ 3!} = 34220$$

अन्त में हम $C(n, r)$ तथा $C(n, r-1)$ के बीच एक **आवर्ती सम्बन्ध (recurrence relation)** सिद्ध करते हैं।

प्रमेय 6 : यदि n तथा r इस प्रकार की प्राकृत संख्याएँ हैं कि $1 \leqslant r \leqslant n$, तो

$$\frac{C(n, r)}{C(n, r-1)} = \frac{n-r+1}{r}$$

उपपत्ति : आपको याद होगा कि :

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

तथा
$$C(n, r-1) = \frac{n!}{(r-1)!\ (n-r+1)!}$$

इस प्रकार, $$\frac{C(n,r)}{C(n,r-1)} = \frac{n!\ (r-1)!\ (n-r+1)!}{r!\ (n-r)!\ n!}$$

अर्थात्, $$\frac{C(n,r)}{C(n,r-1)} = \frac{n-r+1}{r}$$

जिससे प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

हम कब क्रमचयों के सूत्र का तथा कब संचयों के सूत्र का प्रयोग करें ? पाठक ध्यान दें कि **'विन्यास'**, **'क्रम-सम्बन्ध'**, **'क्रमचय'**, **'व्यवस्थित करना'**, **'पंक्ति बद्ध करना'** इत्यादि शब्द प्राय: उन समस्याओं में मुख्य शब्द हैं जिनमें क्रमचयों के सूत्रों के प्रयोग की आवश्यकता होती है। दूसरी ओर शब्द **'चुनाव'** **'उपसम्मुचय'**, **'कमेटी'**, **'चुनना'** इत्यादि शब्द प्राय: उन समस्याओं में मुख्य शब्द हैं जिनमें संचयों के सूत्रों के प्रयोग की आवश्यकता होती है।

प्रश्नावली 7.4

1. मान ज्ञात कीजिए :
   (*i*) $C(8, 5)$
   (*ii*) $C(15, 4)$

2. $C(n, r)$ के लिए सूत्र का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि
   $C(n, r) = C(n, n-r)$

3. एक वृत्त के n बिन्दुओं से कितनी रेखाएँ खींची जा सकती हैं ? इन n बिन्दुओं से कितने त्रिभुज खींचे जा सकते हैं ?

4. मान ज्ञात कीजिए :
   (*i*) $C(50, 47)$
   (*ii*) $C(16, 10)$
   (*iii*) $C(19, 17) + C(19, 18)$
   (*iv*) $C(25, 22) - C(24, 21)$
   (*v*) $C(31, 26) - C(30, 26)$

5. यदि $C(n, 10) = C(n, 12)$ हो तो n का निर्धारण कीजिए तथा इससे $C(n, 5)$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $C(2n, 3) : C(n, 2) = 12 : 1$ हो, तो n ज्ञात कीजिए।

7. सिद्ध कीजिए कि

$C(n, r) = \frac{n}{r} C(n-1, r-1)$, जहाँ n तथा r प्राकृत संख्याएँ हैं तथा $r < n$ है।

8. प्रत्येक शब्द के लिए 3 व्यंजनों (consonants) तथा 2 स्वरों (vowels) का प्रयोग करके 5 व्यंजनों तथा 4 स्वरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं ?

9. प्रत्येक शब्द के लिए 3 स्वरों तथा 2 व्यंजनों का प्रयोग करके शब्द 'INVOLUTE' के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं ?

10. एक ठेकेदार को 2 बढ़ईयों की आवश्यकता है। समान योग्यता वाले 5 व्यक्ति इस पद के लिए आवेदन देते हैं। ठेकेदार कितनी विधियों से 2 व्यक्तियों का चुनाव कर सकता है ?

11. एक परीक्षा में एक विद्यार्थी को 5 में से 4 प्रश्नों के उत्तर देने हैं। परन्तु प्रश्न 1 तथा 2 अनिवार्य है। उन विधियों को निर्धारित कीजिए जिनसे विद्यार्थी प्रश्नों का चयन कर सकता है।

12. एक थैली में से, जिसमें 4 काली तथा 5 लाल गेंदे हैं, 6 गेंदे निकाली जाती हैं। उन विधियों की संख्या निर्धारित कीजिए जिनसे 3 काली तथा 3 लाल गेंदें निकाली जा सकती हैं।

13. 11 भिन्न वस्तुओं को 5 तथा 6 वस्तुओं के दो समूहों में कितनी विधियों से विभाजित किया जा सकता है ?

14. एक परीक्षा पत्र को, जिसमें 12 प्रश्न हैं, दो भागों A तथा B में विभाजित किया गया है। भाग A में 7 तथा भाग B में 5 प्रश्न हैं। एक परीक्षार्थी को प्रत्येक भाग से कम से कम 3 प्रश्न चुनकर कुल 8 प्रश्न हल करने हैं। परीक्षार्थी कितनी विधियों से प्रश्नों का चुनाव कर सकता है ?

15. एक विद्यालय में पुर्नमिलन सभा में कुल 16 विद्यार्थी उपस्थित होते हैं। प्रत्येक विद्यार्थी प्रत्येक अन्य से ठीक एक बार हाथ मिलाता है। हाथ मिलाने की कुल संख्या निर्धारित कीजिए।

16. 52 पत्तों की ताश की एक गड्डी से 5-पत्तों के संचयों की संख्या निर्धारित कीजिए यदि 5-पत्तों के प्रत्येक संचय में एक इक्का अवश्य हो।

17. एक सिक्का 5 बार उछाला जाता है। उन विधियों की संख्या निर्धारित कीजिए जिनसे 0 heads (अर्थात् 0 heads तथा 5 tails) प्राप्त हो सकते हैं। साथ ही, 1 head

(अर्थात् 1 head तथा 4 tails) प्राप्त करने की विधियों की संख्या निर्धारित कीजिए, इत्यादि। तदुपरान्त, निम्न सारणी को पूर्ण कीजिए :

heads की संख्या	0	1	2	3	4	5
विधियों की संख्या						

[प्रश्नावली 7.3 के प्रश्न 22 तथा 23 भी देखिए।]

18. एक सिक्के को 6 बार उछालने से 4 heads तथा 2 tails प्राप्त करने की विधियों की संख्या निर्धारित कीजिए।

    [अनुच्छेद 7.4 का उदाहरण 9 भी देखिए।]

19. 6 लड़कों तथा 5 लड़कियों में से 5 सदस्यों की एक कमेटी चुनी जानी है। कमेटी चुनने की विधियों की संख्या निर्धारित कीजिए यदि कमेटी में कम से कम 1 लड़का तथा 1 लड़की अवश्य हों।

20. सिद्ध कीजिए कि k क्रमागत (consecutive) प्राकृत संख्याओं का गुणनफल $k!$ से विभाज्य होता है।

    [संकेत : $C(n,k)$ की परिभाषा का प्रयोग कीजिए।]

21. एक थैले में 4 लाल, 3 सफेद तथा 2 नीले मार्बल हैं। 3 मार्बलों को यादृच्छिक रूप से (randomly) निकाला जाता है। उन विधियों की संख्या निर्धारित कीजिए जिनसे इस चयन में कम से कम 1 सफेद मार्बल को अवश्य चुना जा सके।

7.6 ऐतिहासिक दृष्टि से

क्रमचयों तथा संचयों की संकल्पनाओं का इतिहास भारत में जैन धर्म के उदय के समय से या सम्भवतया इससे भी पहले से माना जा सकता है। परन्तु इनका श्रेय जैनियों को जाता है जिन्होंने इसकी विषय-वस्तु का **विकल्प** शीर्षक के अन्तर्गत एक स्वतः पूर्ण विषय के रूप में विवेचन किया।

भारत में जैन धर्म के आगमन से पूर्व वैदिक काल में हमें ऐसी परिकल्पनाएँ मिलती हैं जिनमें कि श्लोकों और छंदों को परिवर्तित करने की विधियों की संख्याएँ ज्ञात की गई हैं।

ईसा से पूर्व छठी शताब्दी में **सुश्रुत** ने अपनी औषधीय कृति **सुश्रुत संहिता** में तर्क दिया है कि 6 भिन्न रसों में से एक बार में एक, एक बार में दो, इत्यादि लेकर 63 संचय बनाए जा सकते हैं। ईसा से पूर्व लगभग तीसरी शताब्दी में एक संस्कृत विद्वान **पिंगला** ने अपनी कृति **छंद-सूत्र** में कुछ दिए हुए अक्षरों में से एक बार में एक, एक बार में दो, इत्यादि लेकर संचयों की संख्या निर्धारित करने की विधि प्रदान की है।

जैनियों में, निस्सन्देह, **महावीर** ने गणित की विभिन्न शाखाओं में महत्वपूर्ण योगदान किया है। वे संसार के प्रथम गणितज्ञ हैं जिन्हें क्रमचयों तथा संचयों के व्यापक सूत्र प्रदान करने का श्रेय प्राप्त है।

भास्कर (जन्म 1114 ई०) ने क्रमचयों तथा संचयों की विषय-वस्तु का उल्लेख अपनी सुप्रसिद्ध कृति **लीलावती** में **अंक-पाशा** शीर्षक के अन्तर्गत किया है।

महावीर द्वारा $C(n, r)$ तथा $P(n, r)$ के लिए पहले से प्रदान किए गए व्यापक सूत्रों के अतिरिक्त भास्कर ने इस विषय पर अनेकों महत्वपूर्ण प्रमेयों तथा परिणामों का भी उल्लेख किया है।

भारत से बाहर क्रमचयों तथा संचयों की विषय-वस्तु का अल्प आरम्भ चीन में प्रसिद्ध पुस्तक I-किंग (परिवर्तनों की पुस्तक) में हुआ। इस कृति का अनुमानित समय देना कठिन है क्योंकि 213 ई० पू० वहाँ के राजा ने देश में सभी पुस्तकों अथवा हस्तलिपियों को जला डालने की आज्ञा दे दी थी। परन्तु सौभाग्यवश उन आदेशों का पूर्ण रूप से पालन नहीं किया गया।

यूनान तथा इसके पश्चात लेटिन वासियों ने भी क्रमचयों तथा संचयों के सिद्धांत पर कुछ छुटपुट कार्य किया है। उनका बहुत सा कार्य भारत में किए गए कार्य का पुन: आविष्कार ही था। यूनानियों ने मुख्य रूप से अपना ध्यान क्रमचयों के सिद्धांतों पर केन्द्रित किया। उदाहरणार्थ, यूनानी दार्शनिक जेनोक्रेटस (Xenocrates) ने कुल सम्भव संधियों (syllables) की संख्या 1002000000000 परिकलित की थी। यह लगभग 350 ई० पू० में हुआ था। एक अन्य यूनानी दार्शनिक **क्रिसीपस (Chrysippus)** (280-207 ई० पू०) ने 10 स्वयं तथ्यों (axioms) के कुल सम्भव विन्यासों की संख्या परिकलित की। परन्तु उन्होंने केवल इतना कहा कि यह संख्या 1000000 से अधिक है। लैटिन लेखकों में से **ए० एम० एस० बोथिस (A.M.S. Boethius)** (480-524 ई०) ने लगभग 510 ई० में $C(n,2)$ निर्धारित करने का एक नियम प्रदान किया।

मध्य काल में अरब तथा हिब्रू लेखक अपने खगोल-विज्ञान के अध्ययन के लिए क्रमचयों तथा संचयों की संकल्पनाओं में जुटे रहे। उदाहरणार्थ, **रब्बी बेनेजरा (Rabbi ben Ezra)** ने ज्ञात ग्रहों में एक बार में दो, एक बार में तीन, इत्यादि को लेकर संचयों की संख्या निर्धारित की। ऐसा लगभग 1140 ई० में किया गया। ऐसा प्रतीत होता है कि Rabbi ben Ezra $C(n,r)$ के सूत्र को नहीं जानते थे। परन्तु उन्हें यह ज्ञात था कि n तथा r के विशिष्ट मानों के लिए $C(n,r) = C(n, n-r)$ होता है। 1321 ई० में एक अन्य हिब्रू लेखक **लेवी बेन गर्सन (Levi ben Gerson)** ने $P(n,r)$ तथा $P(n,n)$ के लिए सूत्र दिए तथा $C(n,r)$ के लिए निम्न व्यापक सूत्र प्रस्तुत किया :

$$C(n,r) = \frac{n(n-1)\ (n-2)\ldots(n-r+1)}{r!}$$

पहली पुस्तक जिसमें क्रमचयों तथा संचयों की विषय-वस्तु का पूर्ण विवरण दिया गया है वह है Ars Conjectandi जिसे स्विटजरलैंड के **जैकब बर्नूली (Jakob Bernoulli)** (1654-1705 ई०) ने लिखा था। यह पुस्तक उनकी मृत्यु के पश्चात 1713 ई० में प्रकाशित हुई थी। निश्चय ही इस पुस्तक में क्रमचयों तथा संचयों के सिद्धांत का वैसा ही वर्णन मिलता है जैसा कि यह आज जाना जाता है।

7.7 मुख्य संकल्पनाएँ

गणन का मूलभूत सिद्धांत	**संचय —C(n,r)**
फैक्टोरियल—n !	**वस्तुओं के क्रमचय जबकि**
क्रमचय—P(n,n), P(n, r)	**उनमें से कुछ एक सी हों**

7.8 अग्रिम अध्ययन हेतु सुझाव

इस विषय पर एक श्रेष्ठ पुस्तक निम्न है :

[1] Ivan Niven : **Mathematics of Choice or How to Count without Counting,** The L.W. Singer Company, New York (U.S.A.), 1965.

रुचिपूर्ण अध्ययन के लिए एक रूसी लेखक की छोटी सी निम्न पुस्तक है :

[2] N. Vilenkin : **Combinatorial Mathematics for Recreation,** Mir Publishers, Moscow (U.S.S.R), 1972.

संकल्पनाओं का प्रारम्भिक वर्णन निम्न पुस्तक में मिलता है :

[3] H.R. Jacobs : **Mathematics, A Human Endeavour,** W. H. Freeman and Company, California (U S.A.), 1970.

क्रमचयों तथा संचयों के विषय के ऐतिहासिक संदर्श (perspective) के लिए पाठक अनुच्छेद 1.12 में, दी गई पुस्तकें [4], [5] तथा [7] देखें।

एकक VIII

द्विपद प्रमेय

गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करके एक धनात्मक पूर्णांकीय घातांक के लिए द्विपद प्रमेय को सिद्ध किया गया है। द्विपद गुणांकों के सरल गुणधर्मों का अध्ययन किया गया है। तदुपरान्त द्विपद प्रमेय को ऋणात्मक और परिमेय घातांकों के लिए भी लागू किया गया है। संख्याओं के मूल और घातों के ज्ञात करने में इसके अनुप्रयोगों पर विचार किया गया है।

8.1 भूमिका

पाठक पहले से ही 'द्विपद' की संकल्पना से परिचित हैं। आइए देखें कि यदि हम द्विपद $(x+y)$ की घात एक ऋणेतर पूर्णांकीय घातांक* लें** तो हमें क्या प्राप्त होता है।

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x+y$$
$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$
$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$
$$(x+y)^4 = x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$$
$$(x+y)^5 = x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5$$

उपरोक्त प्रत्येक अवस्था में हम कहते है कि हमने द्विपद को **प्रसारित (expand)** किया है। इन **द्विपद प्रसारों (binomial expansions)** में हम क्या देखते है? हम देखते हैं कि

1. **प्रसार में पदों की संख्या घातांक से सदैव एक अधिक है।**

---

*वास्तव में अगर देखें तो यह $x+y=0$ के लिए मान्य नहीं है जब तक कि हम राशि 0^0 का मान निर्दिष्ट न कर लें।

**पाठक को चाहिए कि वह वास्तविक गुणन द्वारा इनमें से प्रत्येक की जाँच करे।

2. प्रत्येक प्रसार में

(क) (x में) प्रथम पद का घातांक द्विपद के घातांक के समान है। (इससे निष्कर्ष निकलता है कि प्रथम पद में y का घातांक शून्य है।)

(ख) इसके पश्चात आने वाले प्रत्येक पद में x का घातांक 1 घट जाता है तथा साथ ही साथ y का घातांक 1 बढ़ जाता है।

(ग) यह क्रम तब तक चलता रहता है जब तक कि हम अंतिम पद पर न पहुँच जाएँ। इस अवस्था में x का घातांक शून्य तथा y का घातांक द्विपद के घातांक के समान हो जाता है।

3. प्रत्येक प्रसार के प्रत्येक पद में x तथा y के घातांकों का योग द्विपद के घातांक के समान होता है।

4. किसी प्रसार में विभिन्न पदों के गुणांक (coefficients) एक प्रतिरूप (pattern) बनाते हैं। आइए इस प्रतिरूप की जाँच करें :

द्विपद का घातांक	विभिन्न पदों के गुणांक
0	1
1	1—1
2	1—2—1
3	1—3—3—1
4	1—4—6—4—1
5	1 5 10 10 5 1

(क) गुणांकों की प्रत्येक पंक्ति दोनों ओर 1 से परिबद्ध है।

(ख) किसी भी पंक्ति में कोई अन्य गुणांक इससे तुरन्त पहले की पंक्ति के दो गुणांकों, अर्थात् एक तुरन्त बांया गुणांक तथा दूसरा तुरन्त दांया गुणांक, के योग के समान होता है। इसे त्रिभुज बनाने वाले बिन्दुकित (dotted) चिन्हों से दर्शाया गया है। उदाहरणार्थ, घातांक 4 की तदनरूपी पंक्ति में हम देखते हैं कि $4 = 1+3$, $6 = 3+3$, $4 = 3+1$। यह पंक्ति दोनों ओर 1 से परिबद्ध है।

गुणांकों की उपरोक्त व्यवस्था को आजकल सामान्यतया पास्कल त्रिभुज (Pascal's Triangle) कहा जाता है। फ्रांस में जन्मे ब्लेज् पास्कल (1623 ई० --1662 ई०) ने 1653 में एक त्रिभुज की रचना की जो उपरोक्त त्रिभुज के समान ही था परन्तु इसे कुछ परिवर्तित रूप में लिखा गया था। उन्होंने द्विपद प्रसार के

गुणांकों को प्राप्त करने के लिए इस त्रिभुज का प्रयोग किया था। इसे 1665 ई० में प्रकाशित किया गया तथा यह **अंकगणितीय त्रिभुज (arithmetical triangle)** के नाम से जाना जाता था।

त्रिभुज के जिस रूप का प्रयोग हमने किया है वह इटली के **Nicola of Brescia,** जिन्हें आमतौर पर **टारटगलिया** (1499 ई०—1557 ई०) के नाम से जाना जाता था, तथा जर्मनी के **माइकेल स्टाइफेल** (1486 ई०—1567 ई०) **और साईमन स्टीविन** (1548 ई०—1620 ई०) को ज्ञात था।

पूर्वकालीन हिन्दू गणितज्ञ एक ऋणेतर पूर्णांक $n \leq 7$ के लिए $(x+y)^n$ के प्रसार में आने वाले **गुणांकों** को जानते थे। इन गुणांकों की एक आरेख के रूप में व्यवस्था **(arrangement)** जिसे **मेरु-प्रस्तर** कहा **जाता है,** सर्व प्रथम ईसा से पूर्व तीसरी शताब्दी में **पिंगला** द्वारा दी गई थी। मेरु-प्रस्तर की त्रिभुजीय व्यवस्था का **वर्णन चीनी गणितज्ञ चु शी-काई** द्वारा 1303 ई० में किए गए कार्य में भी मिलता है। इस प्रकार, पास्कल इस **त्रिभुज** का जन्मदाता नहीं था। परन्तु उस ने इस त्रिभुज के बहुत से **गुणधर्मों** के महत्व को दर्शाया तथा अपनी **कृतियों** में इसका इतना विस्तृत प्रयोग किया कि इस त्रिभुज के साथ पास्कल का नाम दृढ़ता से जुड़ गया।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : प्रसारित कीजिए

$(i)\quad (a+4)^5 \qquad\qquad (ii)\quad (2-3x^2)^4$

हल : $(i)\quad (a+4)^5 = (a^5)(4)^0 + 5(a)^4(4)^1 + 10(a)^3(4)^2 + 10(a)^2(4)^3 + 5(a)^1(4)^4 + (a)^0(4)^5$

सरल करने पर हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(a+4)^5 = a^5 + 20a^4 + 160a^3 + 640a^2 + 1280a + 1024$$

$$(ii)\ (2-3x^2)^4 = (2)^4 + 4(2)^3(-3x^2)^1 + 6(2)^2(-3x^2)^2 + 4(2)^1(-3x^2)^3 + (-3x^2)^4$$
$$= 16 - 96x^2 + 216x^4 - 216x^6 + 81x^8$$

[पाठक को चाहिए वह ध्यान दे कि हमने किस प्रकार पास्कल त्रिभुज से विभिन्न गुणांकों को प्रयुक्त किया है।]

उदाहरण 2 : $\left(\frac{4}{7}x - q^2\right)^5$ के प्रसार में चौथा पद ज्ञात कीजिए।

हल : पास्कल त्रिभुज से चौथे पद का गुणांक 10 होगा।

अत: चौथा पद $= 10\left(\frac{4}{7}x\right)^2\left(-q^2\right)^3$

$$= \frac{-160}{49}x^2q^6$$

[पाठक को याद होगा कि **किसी भी पद में y का घातांक पद संख्या से 1 कम होता है। फिर x का घातांक सुगमतापूर्वक प्राप्त** किया जा सकता है क्योंकि **किसी पद में x** तथा y **के घातांकों का योग द्विपद के घातांक के समान होता है।**]

पास्कल त्रिभुज का प्रयोग $(x+y)^6$, $(x+y)^7$, इत्यादि के प्रसारों में गुणांक ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है। परन्तु पास्कल त्रिभुज की किसी विशेष पंक्ति के गुणांकों को ज्ञात करने के लिए हमें उससे तुरन्त पहले की पंक्ति के गुणांकों का प्रयोग करना पड़ता है और ऐसा करने के लिए फिर उससे तुरन्त पहले की पंक्ति के गुणांकों का प्रयोग होता है, इत्यादि। अतः यदि हमें किसी वांछित पंक्ति के गुणांकों का प्रयोग करने के लिए पास्कल त्रिभुज का निर्माण करना पड़े तो यह अति असुविधाजनक होगा तथा इसमें समय भी अत्यधिक लगेगा। **क्या हम किसी अन्य अधिक सुविधाजनक विधि से गुणांकों को प्राप्त नहीं कर सकते ?** आइए देखें।

आइए, उदाहरणार्थ, $(x+y)^3$ के प्रसार की जाँच करें। हमारे पास एक पद x^3 में, एक पद x^2y में, एक पद xy^2 में तथा एक पद y^3 में है। आइए इसे निम्न रूप में लिखें तथा गुणनखंडों को प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय से प्रदर्शित करें :

$$(x+y)^3 = \underset{\text{प्रथम}}{(x+y)}\ \underset{\text{द्वितीय}}{(x+y)}\ \underset{\text{तृतीय}}{(x+y)}$$

अब हम, कोई पद, उदाहरणार्थ, x^2y किस प्रकार प्राप्त करते हैं ? यह दो x तथा एक y का गुणनफल है। इस प्रकार हम प्रथम पद के x, द्वितीय पद के x तथा तृतीय पद के y का गुणा कर सकते हैं अथवा हम प्रथम पद के x, द्वितीय पद के y तथा तृतीय पद के x का गुणा कर सकते हैं, इत्यादि। अतः हमें दो ऐसे गुणनखंड चुनने की आवश्यकता है जिनमें से प्रत्येक से x ले सकें तथा एक ऐसा गुणनखंड चुनने की आवश्यकता है जिसमें से y ले सकें और फिर इन्हें लेकर हम परस्पर गुणा करते हैं। हम तीन गुणनखंडों में से एक गुणनखंड को कितनी विधियों से चुन सकते हैं ? [इस गुणनखंड से हम y ले लेते हैं तथा शेष बचे दो गुणनखंडों में से प्रत्येक से x लेते हैं।] स्पष्ट है कि हम ऐसा $C(3,1)=\frac{3!}{1!\,2!}=3$ विधियों से कर सकते हैं।

अतः पद x^2y का गुणांक 3 है।

इसी प्रकार के तर्क द्वारा हम देखते हैं कि पद, उदाहरणार्थ, x^3 तीनों गुणनखंडों में से प्रत्येक से x लेकर और इन्हें परस्पर गुणा करने से प्राप्त किया जा सकता है। अर्थात् y लेने के लिए हमें किसी गुणनखंड को नहीं चुनना है। ऐसा $C(3,0)=1$ विधि से किया जा सकता है। अतः पद x^3 का गुणांक 1 है।

[पाठक को चाहिए कि वह इसी प्रकार के तर्क द्वारा पदों xy^2 तथा y^3 के गुणांकों का निर्धारण करे।]

अतः $(x+y)^3$ के प्रसार में गुणांकों को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$C(3,0)$; $C(3,1)$; $C(3,2)$; $C(3,3)$

[पाठक यह जाँच करें कि $(x+y)^4$ के प्रसार में गुणांकों को इस प्रकार से लिखा जा सकता है :

$C(4,0)$; $C(4,1)$; $C(4,2)$; $C(4,3)$; $C(4,4)$ तथा $(x+y)^5$ के प्रसार में इन्हें

$C(5,0)$; $C(5,1)$; $C(5,2)$; $C(5,3)$, $C(5,4)$; $C(5,5)$ के रूप में लिखा जा सकता है, इत्यादि।]

क्योंकि ये गुणांक गुणनखंडों के संचयों (combinations) की संख्या से प्राप्त होते हैं अतः प्रायः इन्हें **संचय विन्यास गुणांक (combinatorial coefficients)** कहा जाता है।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : $(x^2+2y)^6$ को प्रसारित कीजिए।

हल : हमें निम्न प्रसार प्राप्त होता है :

$$(x^2+2y)^6 = C(6,0)\ (x^2)^6 + C(6,1)\,(x^2)^5\ (2y) + C(6,2)\ (x^2)^4\ (2y)^2 + C(6,3)\,(x^2)^3 (2y)^3 + C(6,4)\,(x^2)^2\ (2y)^4 + C(6,5)\,x^2\ (2y)^5 + C(6,6)\ (2y)^6$$

$$= \frac{6!}{0!\,6!}x^{12} + \frac{6!}{1!\,5!}x^{10}\ (2y) + \frac{6!}{2!\,4!}x^8\ (4y^2) + \frac{6!}{3!\,3!}x^6\ (8y^3) + \frac{6!}{4!\,2!}\ x^4\ (16y^4) + \frac{6!}{5!\,1!}\ x^2\ (32y^5) + \frac{6!}{6!\,0!}\ (64y^6)$$

$$= 1\ x^{12} + 6\ x^{10}\,(2y) + 15\ x^8\,(4y^2) + 20\ x^6 (8y^3) + 15\ x^4 (16y^4) + 6\ x^2\ (32y^5) + 1\ (64y^6)$$

अर्थात्,
$$(x^2+2y)^6 = x^{12} + 12x^{10}y + 60x^8y^2 + 160x^6y^3 + 240x^4y^4 + 192\ x^2\ y^5 + 64\ y^6$$

उदाहरण 4 : $(x+\frac{2}{5}y)^4$ के प्रसार में तीसरा पद लिखिए ।

हल : तीसरा पद $= C(4,2)\,(x)^{4-2}(\frac{2}{5}y)^2$

$$= \frac{4\ !}{2!\ 2!}\ x^2 \left(\frac{2}{5}y\right)^2$$

$$= 6x^2 \left(\frac{4}{25}\ y^2\right)$$

अर्थात्, तीसरा पद $= \frac{24}{25}\ x^2 y^2$

क्या अब आप किसी द्विपद (x+y) की nवीं घात के लिए सूत्र का अनुमान लगा सकते हैं ? यह निम्न है :

$$(x+y)^n = C(n,0)x^n + C(n,1)x^{n-1}y + C(n,2)\,x^{n-2}y^2 + \ldots + C(n,r)\,x^{n-r}y^r + \ldots + C(n.n)\,y^n$$

अर्थात्, $(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n}\ C(n,r)\ x^{n-r}\ y^r$

इसके लिए कि यह वास्तव में सत्य है उपपत्ति की आवश्यकता है। अगले अनुच्छेद में हम उपरोक्त को सिद्ध करने के लिए गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करेंगे ।

प्रश्नावली 8.1

निम्नलिखित को प्रसारित कीजिए :

1. $(x^2+y^2)^3$ 2. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$

3. $(2x-3y)^5$

4. $\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}y\right)^4$

5. $\left(-3x-\frac{1}{3x}\right)^3$

6. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ के प्रसार में मध्य पद लिखिए ।

7. $\left(\frac{x}{8}+y^2\right)^5$ के प्रसार में x^3 का गुणांक ज्ञात कीजिए ।

8. $\left(3x-\frac{y^2}{6}\right)^4$ के प्रसार में तीसरे पद का गुणांक ज्ञात कीजिए ।

9. निम्नलिखित के गुणांक निर्धारित करने के लिए उस प्रकार का तर्क दीजिए जैसा कि अनुच्छेद 8.1 में दिया गया है :
   (i) $(x+y)^3$ में xy^2 का
   (ii) $(x+y)^3$ में y^3 का
   (iii) $(x+y)^4$ में x^2y^2 का
   (iv) $(x+y)^5$ में x^2y^3 का

8.2 ऋणेतर पूर्णांकीय घातांकों के लिए द्विपद प्रमेय (The Binomial Theorem For Non-negative Integral Exponents)

द्विपद $(x+y)$ की nवीं घात के लिए सूत्र को द्विपद प्रमेय (Binomial Theorem) अथवा **द्विपद प्रसार (Binomial expansion)** कहा जाता है । हम द्विपद प्रमेय को उस स्थिति के लिए सिद्ध करते हैं जबकि घातांक n एक ऋणेतर पूर्णांक है ।

स्पष्ट है कि जब $n=0$ है तो $(x+y)^0=1$

अब हम द्विपद प्रमेय को उस स्थिति में सिद्ध करने के लिए, जब घातांक n एक प्राकृत संख्या है, गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करेंगे ।

प्रमेय 1 : यदि n एक प्राकृत संख्या है, तो

$$(x+y)^n=C(n,0)x^n+C(n,1)x^{n-1}y+C(n,2)x^{n-2}y^2+\ldots+C(n,r)x^{n-r}y^r+\ldots+C(n,n)y^n$$

अर्थात्, $$(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n} C(n,r)x^{n-r}y^r$$

उपपत्ति: आइए, द्विपद प्रसार सम्बन्धी कथन को, जबकि n एक प्राकृत संख्या है, $P(n)$ से व्यक्त करें ।

अर्थात्, $$P(n) : (x+y)^n=C(n,0)\,x^n+C(n,1)x^{n-1}\,y+C(n,2)x^{n-2}y^2+\ldots+C(n,r)x^{n-r}y^r+\ldots+C(n,n)y^n \quad (1)$$

क्या P(1) सत्य है ? $P(1)$ क्या है ? यह निम्न कथन है :

$$(x+y)^1=C(1,0)\,x+C(1,1)y \quad (2)$$

परन्तु $C(1,0)=1$ तथा $C(1,1)=1$

इस प्रकार (2) से,

$$(x+y)^1=x+y$$

जो कि वस्तुतः सत्य है।

अब मान लीजिए कि $P(k)$ सत्य है, अर्थात्

$$P(k): (x+y)^k=C(k,0)x^k+C(k,1)x^{k-1}y+C(k,2)x^{k-2}y^2 + \ldots + C(k,r)x^{k-r}y^r+\ldots+C(k,k)\ y^k \quad (3)$$

हम यह दिखाना चाहते हैं कि $P(k+1)$ सत्य है, अर्थात्

$$P(k+1): (x+y)^{k+1}=C(k+1,0)x^{k+1}+C(k+1,1)x^ky+\ldots + C(k+1,r)x^{k+1-r}y^r+\ldots+C(k+1,k+1)y^{k+1} \quad (4)$$

आइए (4) के वाम पक्ष की जाँच करें। हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(x+y)^{k+1}=(x+y)^k(x+y) \quad (5)$$

$(x+y)^k$ के प्रसार में $(k+1)$ पद हैं। (5) के दक्षिण पक्ष में हमें $(x+y)^k$ तथा $(x+y)$ को गुणा करने की आवश्यकता है। अब जब हम $(k+1)$ पदों को $(x+y)$ के दो पदों से गुणा करेंगे तो हम कितने पद प्राप्त करेंगे ? हम $(k+1)+(k+1)=(2k+2)$ पद प्राप्त करेंगे। हम x की समान घातों के गुणांकों को इकट्ठा करते हैं तथा निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(x+y)^k(x+y)=C(k,0)x^{k+1}+[C(k,1)+C(k,0)]x^ky \; [C(k,2)+C(k,1)]\ x^{k-1}\ y^2+\ldots+ [C(k,r)+C(k,r-1)]\ x^{k-r+1}\ y^r+\ldots+C(k,k)\ y^{k+1} \quad (6)$$

अब, $C(k,0)=C(k+1,0)$

तथा, $C(k,k)=C(k+1,\ k+1)$

पुनः एकक VII के प्रमेय 5 द्वारा, $1 \leqslant r \leqslant k$ के लिए हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$C(k,r)+C(k,r-1)=C(k+1,r)$$

अर्थात्,

$$C(k,1)+C(k,0)=C(k+1,1)$$
$$C(k,2)+C(k,1)=C(k+1,2)$$
$$C(k,3)+C(k,2)=C(k+1,3)$$

इत्यादि।

अब (6) को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$(x+y)^k(x+y)=C(k+1,0)x^{k+1}+C(k+1,1)x^ky +C(k+1,\ 2)x^{k-1}\ y^2+\ldots+C(k+1,r)x^{k-r+1}y^r +\ldots+C(k+1,k+1)y^{k+1}$$

जो कि (4) से, निस्संदेह, $(x+y)^{k+1}$ का प्रसार है।

इस प्रकार हमने सिद्ध कर दिया है कि

(A) $P(1)$ सत्य है, तथा

(B) जब भी $P(k)$ सत्य है, $P(k+1)$ सत्य है।

इससे $P(n)$ सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए सिद्ध हो जाता है। हम नीचे कुछ महत्वपूर्ण टिप्पणियाँ दे रहे हैं :

टिप्पणी 1 : हम देखते हैं कि इस प्रसार में $(r+1)$ वाँ पद, T_{r+1} निम्न है :

$$T_{r+1}=C(n,r)x^{n-r}y^r$$

कुछ लेखक $(r+1)$ वें पद को **व्यापक पद** भी कहते हैं।

टिप्पणी 2 : प्रमेय 1 का कथन निम्नलिखित रूप से भी व्यक्त किया जाता है :
हम $x=1$ तथा $y=a$ मान लेते हैं। हम कहते हैं कि **यदि n एक प्राकृत संख्या है तो,**

$$(1+a)^n=1+C(n,1)a+C(n,2)a^2+\ldots+C(n,r)a^r+\ldots+C(n,n)a^n$$

इस प्रसार के लिए $(r+1)$ **वाँ पद** $T_{r+1}=C(n,r)a^r$ है।
अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार प्राप्त करने के लिए द्विपद प्रमेय का प्रयोग कीजिए

(*i*) $(x^2-y)^7$ (*ii*) $\left(a+\frac{1}{b}\right)^{10}$

हल : (i) हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(x^2-y)^7=C(7,0)\,(x^2)^7+C(7,1)\,(x^2)^6(-y)+C(7,2)\,(x^2)^5(-y)^2$$
$$+C(7,3)\,(x^2)^4\,(-y)^3+C(7,4)\,(x^2)^3(-y)^4+C(7,5)\,(x^2)^2\,(-y)^5$$
$$+C(7,6)\,(x^2)(-y)^6+C(7,7)\,(-y)^7$$
$$=x^{14}-7x^{12}y+\frac{7!}{2!\,5!}x^{10}y^2-\frac{7!}{3!\,4!}x^8y^3$$
$$+\frac{7!}{4!\,3!}x^6y^4-\frac{7!}{5!\,2!}x^4y^5+7x^2y^6-y^7$$

अर्थात्, $(x^2-y)^7=x^{14}-7x^{12}y+21x^{10}y^2-35x^8y^3+35x^6y^4-21x^4y^5+7x^2y^6-y^7$

(ii) हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^{10}=\sum_{r=0}^{10}C(10,r)\,(a)^{10-r}\left(\frac{1}{b}\right)^r$$

हम विभिन्न संचय विन्यास गुणांकों को परिकलित करते हैं तथा निम्न प्राप्त करते हैं :

$C(10,0)=C(10,10)=1$; $C(10,1)=C(10,9)=10$;

$C(10,2)=C(10,8)=45$; $C(10,3)=C(10,7)=120$;

$C(10,4)=C(10,6)=21$[illegible]

इस प्रकार,

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^{10} = a^{10} + 10\,\frac{a^9}{b} + 45\,\frac{a^8}{b^2} + 120\,\frac{a^7}{b^3} + 210\,\frac{a^6}{b^4} + 252\,\frac{a^5}{b^5}$$

$$+ 210\,\frac{a^4}{b^6} + 120\,\frac{a^3}{b^7} + 45\,\frac{a^2}{b^8} + 10\,\frac{a}{b^9} + \frac{1}{b^{10}}$$

उदाहरण 2 : $(x+3)^9$ के प्रसार में छठा पद ज्ञात कीजिए।

हल : आपको याद होगा कि $(x+y)^n$ के प्रसार में $(r+1)$ वाँ पद

$T_{r+1} = C(n, r)x^{n-r}y^r$ होता है।

अब, $n = 9, \quad r = 5$ है। इस प्रकार,

$$T_6 = C(9, 5)\, x^{9-5}\, (3)^5$$

$$= \frac{9!}{5!\,4!}\, x^4\, (243) = (126)\,(243)\, x^4$$

अर्थात्, $T_6 = 30618\, x^4$

अतः $(x+3)^9$ के प्रसार में छठा पद $30618\, x^4$ है।

उदाहरण 3 : $\left(z - \frac{1}{z}\right)^{12}$ के प्रसार में z से स्वतंत्र पद को लिखिए तथा उसे सरल कीजिए।

हल : z से स्वतंत्र पद को लिखने के लिए हमें वह पद परिकलित करना चाहिए जिसमें z तथा $\left(-\frac{1}{z}\right)$ के घातांक समान हों। स्पष्ट है कि यह घातांक 6 होना चाहिए। अतः वांछित पद 7वाँ पद अर्थात् T_7 है। इस प्रकार,

$$T_7 = C(12, 6)\, z^{12-6}\left(-\frac{1}{z}\right)^6$$

$$= \frac{12!}{6!\,6!}\, z^6\left(\frac{1}{z^6}\right)$$

$$= 924$$

अतः $\left(z - \frac{1}{z}\right)^{12}$ के प्रसार में z से स्वतंत्र पद 924 है।

उदाहरण 4 : सिद्ध कीजिए कि n अवयवों के एक परिमित समुच्चय के सभी उपसमुच्चयों की संख्या 2^n होती है।

हल : आपको याद होगा कि रिक्त समुच्चय प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है। केवल $1 = C(n,0)$ उपसमुच्चय अर्थात् रिक्त समुच्चय ऐसा है जिसमें कोई भी अवयव नहीं है।

अब 1 अवयव के कितने उपसमुच्चय हैं ? आपको याद होगा कि n भिन्न वस्तुओं में से एक बार में 1 वस्तु लेकर प्राप्त संचयों की संख्या $C(n, 1)$ होती है। इस प्रकार 1-अवयव वाले उपसमुच्चयों की संख्या $C(n, 1)$ है।

इसी प्रकार, 2-अवयवों के उपसमुच्चयों की संख्या $C(n, 2)$ है, 3-अवयवों के उपसमुच्चयों की संख्या $C(n, 3)$ है, इत्यादि। अन्त में, n अवयवों के उपसमुच्चयों की संख्या $C(n, n)$ है। यह निरसंदेह स्वयं वह समुच्चय ही है।

अत: कुल उपसमुच्चयों की संख्या निम्न है :

$$C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \ldots + C(n,r) + \ldots + C(n,n) \quad (1)$$

आपको $(1+a)^n$ के प्रसार के बारे में याद होगा। इसके संचय विन्यास गुणांक वैसे ही हैं जैसे कि हम चाहते हैं केवल इस अंतर के साथ कि इस प्रसार में a भी आते हैं। अत. यदि हम $(1+a)^n$ के प्रसार में $a=1$ ले लें तो हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(1+1)^n = 1 + C(n,1) + C(n,2) + \ldots + C(n,r) + \ldots + C(n,n)$$

अर्थात्, $$2^n = C(n,0) + C(n,1) + C(n,2) + \ldots + C(n,r) + \ldots + C(n,n)$$

अत: n अवयवों के एक परिमित समुच्चय के सभी उपसमुच्चयों की संख्या 2^n है।

[प्रश्नावली 6.1 का प्रश्न 18 भी देखिए।]

उदाहरण 5 : $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^{11}$ के प्रसार में उस पद का गुणांक ज्ञात कीजिए जिसमें x^{10} आता हो।

हल : आपको याद होगा कि $(r+1)$ वाँ पद, T_{r+1} निम्न है :

$$T_{r+1} = C(11,r)\,(2x^2)^{11-r}\left(-\frac{3}{x}\right)^r$$

अर्थात्, $$T_{r+1} = C(11,r)\, 2^{11-r}\, (-3)^r\, x^{22-3r} \quad (1)$$

हम उस पद का गुणांक ज्ञात करना चाहते हैं जिसमें x^{10} आता है।

इस प्रकार, $22-3r=10$

जिससे, $r=4$

अब (1) से हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$T_5 = C(11,4)2^{11-4}(-3)^4 x^{22-12}$$

$$= \frac{11!}{4!\,7!}\, 2^7\, (81) x^{10}$$

अर्थात्, $T_5 = 330\,(128)\,(81)\, x^{10}$

अत:, $\left(2x^2 - \dfrac{3}{x}\right)^{11}$ के प्रसार में x^{10} का गुणांक $330\,(128)\,(81) = 3421440$ है।

उदाहरण 6 : यदि $(1+a)^n$ के द्विपद प्रसार में, a^{r-1}, a^r तथा a^{r+1} के गुणांक समांतर श्रेणी में हों, तो सिद्ध कीजिए कि

$$n^2 - n(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$$

हल : आपको याद होगा कि इस प्रसार में $C(n, r-1)$, a^{r-1} का गुणांक है। इसी प्रकार $C(n,r)$ तथा $C(n,r+1)$ क्रमशः a^r तथा a^{r+1} के गुणांक हैं।

हमें दिया हुआ है कि $C(n,r-1)$, $C(n,r)$ तथा $C(n,r+1)$ समांतर श्रेणी में हैं।

अर्थात्, $$2\,C(n,r) = C(n,r-1) + C(n,r+1) \qquad (1)$$

हम (1) के दोनों पक्षों को $C(n,r)$ से भाग देते हैं तथा निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\frac{C(n,r-1)}{C(n,r)} + \frac{C(n,r+1)}{C(n,r)} = 2 \qquad (2)$$

अब, $$\frac{C(n,r-1)}{C(n,r)} = \frac{n!\; r!\; (n-r)!}{(r-1)!\;(n-r+1)!\; n!} = \frac{r}{n-r+1}$$

तथा, $$\frac{C(n,r+1)}{C(n,r)} = \frac{n!\; r!\; (n-r)!}{(r+1)!\;(n-r-1)!\; n!} = \frac{n-r}{r+1}$$

इस प्रकार (2) से हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{r}{n-r+1} + \frac{n-r}{r+1} = 2$$

जिससे, $$r(r+1) + (n-r)(n-r+1) = 2(n-r+1)(r+1) \qquad (3)$$

सरल करने पर (3) से निम्न प्राप्त होता है :

$$n^2 - n(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0$$

उदाहरण 7 : $(1+a)^n$ के प्रसार में हम संचय विन्यास गुणांक $C(n,r)$ को C_r से व्यक्त करेंगे। हम पहले ही अनुच्छेद 8.2 के उदाहरण 4 में इन संचय विन्यासों के गुणांकों के एक महत्वपूर्ण गुणधर्म को सिद्ध कर चुके हैं जो कि निम्नलिखित है :

$$C_0 + C_1 + C_2 + \ldots + C_n = 2^n$$

सिद्ध कीजिए कि

(i) $C_0 + C_2 + C_4 + \ldots = 2^{n-1}$

(ii) $C_1 + C_3 + C_5 + \ldots = 2^{n-1}$

हल : आइए $(1+a)^n$ के प्रसार में $a = -1$ प्रतिस्थापित करें।

हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(1-1)^n = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - \ldots$$

अर्थात्, $$0 = C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - \ldots$$

इस प्रकार, $$C_0 + C_2 + C_4 + \ldots = C_1 + C_3 + C_5 + \ldots$$

परन्तु, $$C_0 + C_1 + C_2 + C_3 + \ldots + C_n = 2^n$$

अतः, $$C_0 + C_2 + C_4 + \ldots = 2^{n-1}$$

इसी प्रकार, $$C_1 + C_3 + C_5 + \ldots = 2^{n-1}$$

उदाहरण 8 : सिद्ध कीजिए कि

$$(C_0)^2 + (C_1)^2 + (C_2)^2 + \ldots + (C_n)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

जहाँ C_0, C_1, C_2, इत्यादि के सामान्य अर्थ हैं।

हल : आपको याद होगा कि C_r संचय विन्यास गुणांक $C(n,r)$ है जो कि $(1+a)^n$ के प्रसार में a^r का गुणांक है। हमें इन गुणांकों के वर्गों के योग की आवश्यकता है। अत: हम यहाँ सहज ज्ञान का प्रयोग करेंगे।

आइए $(1+a)^n$ तथा $(a+1)^n$ का गुणा करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(1+a)^n (a+1)^n = (C_0 + C_1 a + C_2 a^2 + \ldots + C_r a^r + \ldots + C_n a^n) \times (C_0 a^n + C_1 a^{n-1} + \ldots + C_r a^{n-r} + \ldots + C_n) \quad (1)$$

अब, (1) के दक्षिण पक्ष में a^n का गुणांक क्या है ? स्पष्ट है कि यह

$$(C_0)^2 + (C_1)^2 + \ldots + (C_r)^2 + \ldots + (C_n)^2 \text{ है।} \quad (2)$$

परन्तु, $$(1+a)^n (a+1)^n = (1+a)^{2n} \quad (3)$$

अब, (3) के दक्षिण पक्ष में a^n का गुणांक क्या है ?

स्पष्ट है कि यह निम्न है :

$$C(2n,n) = \frac{(2n)!}{(n!)\,(n!)} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (4)$$

(2) तथा (4) से a^n के गुणांकों को बराबर करने पर हमें वाँछित परिणाम अर्थात्

$$(C_0)^2 + (C_1)^2 + \ldots + (C_r)^2 + \ldots + (C_n)^2 = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ प्राप्त हो जाता है।}$$

प्रश्नावली 8.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक के प्रसार में कुल कितने पद हैं :

   (i) $\left(\frac{2}{p}+\frac{p}{2}\right)^8$?

   (ii) $(x^2-y)^{16}$?

2. $(5-2y)^{11}$ के प्रसार में y^9 के गुणांक को लिखिए तथा उसे सरल कीजिए।

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए :

   (i) $(a-2b)^5$

   (ii) $\left(\frac{2}{3}t-\frac{3}{2t}\right)^6$

   (iii) $(4x-5y)^5$

   (iv) $(y^2+3x)^8$

4. $(-3a-b)^5$ के प्रसार में चौथा पद निर्धारित कीजिए।

5. $(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b)^8$ के प्रसार में मध्य पद निर्धारित कीजिए।

6. यदि T_r, $(1+a)^n$ के प्रसार में, जो कि a की घातों के आरोही क्रम में है, rवाँ पद है तो सिद्ध कीजिए कि

$$r(r+1)\ T_{r+2}=(n-r+1)(n-r)a^2\ T_r$$

7. सिद्ध कीजिए कि $(1+a)^{m+n}$ के प्रसार में a^m तथा a^n के गुणांक समान हैं।

8. $\left(x^3-\frac{1}{x}\right)^{12}$ के प्रसार में x से स्वतंत्र पद के गुणांक को लिखिए तथा उसे सरल कीजिए।

9. यदि C_r, $(1+a)^n$ के प्रसार में संचय विन्यास गुणांक $C(n,r)$ को व्यक्त करता है, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $\frac{C_1}{C_0}+2\frac{C_2}{C_1}+3\frac{C_3}{C_2}+\ldots+n\frac{C_n}{C_{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}$

[संकेत : $\frac{C_r}{C_{r-1}}$ क्या है ?]

(ii) $(C_0+C_1)(C_1+C_2)\ldots(C_{n-1}+C_n)=\frac{C_0C_1\ldots C_{n-1}(n+1)^n}{n!}$

[संकेत : वाम पक्ष को $C_0C_1\ldots C_{n-1}$ से भाग दीजिए। हमें

$\left(1+\frac{C_1}{C_0}\right)\left(1+\frac{C_2}{C_1}\right)\ldots\left(1+\frac{C_n}{C_{n-1}}\right)$, इत्यादि प्राप्त होता है।]

*10. यदि C_r, $(1+a)^n$ के प्रसार में संचय विन्यास गुणांक $C(n,r)$ को व्यक्त करता है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$C_0+2C_1+3C_2+\ldots+(n+1)\ C_n=2^n+n(2^{n-1})$$

[संकेत : वाम पक्ष को $C_0+C_1+C_2+\ldots+C_n+(C_1+2C_2+3C_3+\ldots+nC_n)$ के रूप में लिखिए। कोष्ठकों में दिए व्यंजक को rC_r, इत्यादि के मान लिखकर सरल कीजिए।]

11. $(x^2+a^2)^5$ के प्रसार में दो मध्य पद निर्धारित कीजिए।

12. $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{11}$ के प्रसार में उस पद को लिखिए और सरल कीजिए जिसमें x^5 आता हो।

13. सिद्ध कीजिए कि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में x^n का गुणांक $(1+x)^{2n-1}$ के प्रसार में x^n के गुणांक का दुगुना है।

14. सिद्ध कीजिए कि

$$C_0C_1+C_1C_2+\ldots+C_{n-1}C_n=\frac{2^n(n)[(1)(3)(5)\ldots(2n-1)]}{(n+1)!}$$, जहाँ

C_0, C_1, C_2, इत्यादि के सामान्य अर्थ हैं।

[संकेत : $(1+a)^n(a+1)^n$ तथा $(1+a)^{2n}$ में a^{n+1} के गुणांकों की तुलना कीजिए।]

15. दिखाइए कि यदि द्विपद का घातांक 3 है तो पास्कल त्रिभुज की तदनुरूपी पंक्ति में गुणांकों का योग 2^3 है। यह भी दिखाइए कि यदि द्विपद का घातांक 5 है तो पास्कल त्रिभुज की तदनुरूपी पंक्ति में गुणांकों का योग 2^5 है।

16. $(1+x)^n$ के प्रसार में तीन विशिष्ट क्रमागत (consecutive) गुणांक 1 :3: 5 के अनुपात में हैं। n निर्धारित कीजिए।

17. $(x^2-y)^{10}$ के प्रसार में उस पद को लिखिए और सरल कीजिए जिसमें x^6 आता हो।

8.3 परिमेय घातांकों के लिए द्विपद प्रमेय

अब तक हमने एक द्विपद की n वीं घात के लिए सूत्र प्राप्त किया है, जबकि n एक ऋणेतर पूर्णांक है। हम नीचे परिमेय घातांकों के लिए द्विपद प्रमेय का कथन दे रहे हैं :

प्रमेय 2 : यदि m एक ऋणात्मक पूर्णांक है अथवा एक परिमेय संख्या है, तो

$$(b+x)^m = b^m + mb^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2!}b^{m-2}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-r+1)}{r!}b^{m-r}x^r + \ldots$$

निस्सन्देह, यदि $|x| < b$ हो।

इस प्रमेय की उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। परन्तु हम इस प्रमेय के कुछ अनुप्रयोगों को सीखेंगे।

हम पहले कुछ टिप्पणियाँ दे रहे हैं।

टिप्पणी 1 : ध्यान दीजिए कि गुणांक $m, \frac{m(m-1)}{2!}$, इत्यादि संचय विन्यास गुणांकों जैसे दिखते हैं। परन्तु आपको याद होगा कि $C(n, r)$ प्राकृत संख्याओं n तथा पूर्ण संख्याओं r के लिए ही परिभाषित है। अतः किसी अन्य स्थिति में इसका कोई अर्थ नहीं है।

टिप्पणी 2 : जब m एक ऋणात्मक पूर्णांक है अथवा एक परिमेय संख्या है तो $(b+x)^m$ के प्रसार में पदों की संख्या अपरिमित होती है। इस परिणाम को हम उच्चतर कक्षाओं में सिद्ध करेंगे।

टिप्पणी 3 : निम्नलिखित परिणाम अत्यन्त उपयोगी हैं तथा प्रमेय 2 का प्रयोग करके इन्हें सुगमतापूर्वक प्राप्त किया जा सकता है :

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+\ldots \quad ; |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+\ldots \quad ; |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = 1+x+x^2+x^3+\ldots \quad ; |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+4x^3+\dots \quad ; |x| < 1$$

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : निम्नलिखित में से प्रत्येक का, x की घातों के आरोही क्रम में, पहले तीन पदों तक प्रसार ज्ञात कीजिए :

(i) $\dfrac{1}{(2+x)^4}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6-3x}}$

यह भी बताइए कि ये प्रसार कब मान्य (valid) हैं।

हल : (i) $\dfrac{1}{(2+x)^4} = (2+x)^{-4}$

यह प्रसार तभी मान्य है जबकि $|x| < 2$ हो। हम प्रमेय 2 का प्रयोग करते हैं। हम देखते हैं कि $b = 2$ तथा $m = -4$ है।

इस प्रकार, $(2+x)^{-4} = 2^{-4} + (-4)\, 2^{-5}\,(x) + \dfrac{(-4)\,(-5)}{2!}\, 2^{-6}\,(x^2) + \dots$

$$= \frac{1}{16} - \frac{1}{8}x + \frac{20}{128}x^2 + \dots$$

अतः $\dfrac{1}{(2+x)^4}$ का प्रथम तीन पदों तक प्रसार $\dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{8}x + \dfrac{5}{32}x^2$ है।

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6-3x}} = (6-3x)^{-\frac{1}{3}}$

यह प्रसार तभी मान्य है जबकि $|-3x| < 6$ अर्थात् $|x| < 2$ हो। हम पुनः प्रमेय 2 का प्रयोग करते हैं। यहाँ $m = -\frac{1}{3}$ है।

इस प्रकार,

$$(6-3x)^{-\frac{1}{3}} = 6^{-\frac{1}{3}} + \left(-\frac{1}{3}\right)6^{-\frac{1}{3}-1}(-3x) + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)}{2!}\,6^{-\frac{1}{3}-2}(-3x)^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \frac{1}{6(\sqrt[3]{6})}x + \frac{1}{18(\sqrt[3]{6})}x^2 + \dots$$

अतः $\dfrac{1}{\sqrt[3]{6-3x}}$ का प्रथम तीन पदों तक प्रसार

$$\frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \frac{1}{6(\sqrt[3]{6})}x + \frac{1}{18(\sqrt[3]{6})}x^2 \text{ है।}$$

उदाहरण 2 : $\sqrt[3]{7.00}$ को 4 दशमलव स्थानों तक परिकलित कीजिए।

हल : $\sqrt[3]{7.60}$ को ज्ञात करने के लिए हमें द्विपद प्रमेय का प्रयोग करने की आवश्यकता है। परन्तु इस प्रकार की सन्निकटन समस्याओं (**approximation problems**) के विषय में पहले हम एक टिप्पणी करेंगे।

ज[illegible] की तुलना में x छोटा है तो $(b+x)^m$ का **प्रथम सन्निकटन (first approximation)** $b^m+m\,b^{m-1}x$, [illegible] द्विपद प्रसार के प्रथम दो पदों, द्वारा प्राप्त होता है। $(b+x)^m$ का **दूसरा सन्निकटन** प्रथम तीन पदों [illegible] $b^m+m\,b^{m-1}x+\frac{m\,(m-1)}{2\,!}\,b^{m-2}x^2$, द्वारा प्राप्त होता है और इसी प्रकार आगे के सन्नि[illegible] होते हैं।

किसी विशिष्ट समस्या में चुना जाने वाला सन्निकटन वांछित शुद्धता के अंश पर निर्भर करता है। परन्तु हम पुनः यह कहते है कि x, b की तुलना में छोटा होना चाहिए। **अतः सन्निकटनों को $(1+y)^n$ के प्रसार पर, जबकि y छोटा है, आधारित किया जाना चाहिए।**

अब हम अपनी समस्या की ओर ध्यान देते हैं। हम लिखते हैं कि

$$(7.60)^{\frac{1}{3}}=(8-0.40)^{\frac{1}{3}}=(8)^{\frac{1}{3}}(1-0.05)^{\frac{1}{3}}=2(1-0.05)^{\frac{1}{3}}$$

$$=2\left[1+\tfrac{1}{3}(-0.05)+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)}{2\,!}(-0.05)^2+\frac{(\frac{1}{3})(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)}{3\,!}(-0.05)^3+\ldots\right]$$

$$=2[1-0.01666-0.000277-0.000007+\ldots]$$

क्योंकि हम $\sqrt[3]{7.60}$ को चार दशमलव स्थानों तक परिकलित करना चाहते हैं अतः हम उन पदों की उपेक्षा* कर सकते हैं जिनमें $(-0.05)^3$ तथा (-0.05) की अन्य उच्चतर घातें आती हैं क्योंकि चौथे दशमलव स्थान में इनका कोई योगदान नहीं है।

इस प्रकार, $\sqrt[3]{7.60}=2(.98307)=1.96614$

अतः 4 दशमलव स्थानों तक,

$$\sqrt[3]{7.60}=1.9661$$

उदाहरण 3 : $(1.02)^6$ को पाँच दशमलव स्थानों तक परिकलित कीजिए।

हल : हम लिखते हैं कि

$$(1.02)^6=(1+.02)^6$$

$$=1+6(.02)+\frac{6.5}{2\,!}(.02)^2+\frac{6.5.4}{3\,!}(.02)^3$$

$$+\frac{6.5.4.3}{4\,!}(.02)^4+\frac{6.5.4.3.2}{5\,!}(.02)^5+(.02)^6$$

$$=1+0.12+0.006+0.00016+0.0000024+$$

$$=1.1261624$$

---

* इसके लिए स्पष्ट कथन यह होगा कि ऐसे पदों, जिनमें $(-0.05)^3$ तथा (-0.05) की अन्य उच्चतर घातें आती हैं, के योग के दुगुने का चौथे दशमलव स्थान में कोई योगदान नहीं है। परन्तु इस कथन की उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।

अतः, पांच दशमलव स्थानों तक

$$(1.02)^6 = 1.12616$$

उदाहरण 4 : यह मानकर कि x इतना छोटा है कि x^2 तथा x की अन्य उच्चतर घातों को छोड़ा जा सकता है,

$$\frac{\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{-4}(16-3x)^{\frac{1}{2}}}{(8+x)^{\frac{2}{3}}}$$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि

$$\frac{\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{-4}(16-3x)^{\frac{1}{2}}}{(8+x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{-4}(16)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3}{16}x\right)^{\frac{1}{2}}}{(8)^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{x}{8}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\left(1+\frac{3}{4}x\right)^{-4}\left(1-\frac{3x}{16}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$$

$$=\left[1-4\left(\frac{3}{4}\right)x+\ldots\right]\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{16}\right)+\ldots\right]\left[1-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{8}\right)+\ldots\right]$$

$$=\left(1-3x+\ldots\right)\left(1-\frac{3}{32}x+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{12}x+\ldots\right)$$

$$=\left(1-\frac{3}{32}x-3x+\ldots\right)\left(1-\frac{1}{12}x+\ldots\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{12}x-\frac{3}{32}x-3x+\ldots\right)$$

$$=1-\frac{305}{96}x$$ [x^2 तथा x की अन्य उच्चतर घातों को छोड़ देने पर]

प्रश्नावली 8.3

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रथम तीन पदों तक x की घातों के आरोही क्रम में प्रसार ज्ञात कीजिए :

   (i) $\sqrt{2-3x}$

   (ii) $(27-6x)^{-\frac{2}{3}}$

   (iii) $\dfrac{1}{\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{4}{5}}}$

यह भी बताइए कि प्रत्येक प्रसार कब मान्य है।

2. $(1+x)^{-2}$ के प्रसार में प्रथम चार पद प्राप्त कीजिए यदि यह दिया है कि $|x| > 1$।

[**संकेत** : $(1+x)^{-2} = x^{-2} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{-2}$ लिखिए। अब $\left|\frac{1}{x}\right| < 1$ है तथा प्रसार संभव है।]

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक को 4 दशमलव स्थानों तक परिकलित कीजिए :

(*i*) $\sqrt[4]{16.08}$ (*ii*) $(999)^{-\frac{1}{3}}$

(*iii*) $(10001)^{\frac{3}{4}}$ (*iv*) $(2.002)^{5}$

4. यह मानकर कि निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार सम्भव है, प्रत्येक में x^3 का गुणांक ज्ञात कीजिए :

(*i*) $\dfrac{3-2x}{(1+3x)^{3}}$ (*ii*) $\dfrac{(1-4x)^{2}\,(1-2x^{2})^{\frac{1}{2}}}{(4-x)^{\frac{3}{2}}}$

5. यह मानकर कि x इतना छोटा है कि x^2 तथा x की अन्य उच्चतर घातों की उपेक्षा की जा सकती है,

$$\frac{(1-2x)^{\frac{2}{3}}\,(4+5x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1-x}}$$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. दिखाइए कि $\dfrac{(1+y)^{2}}{(1-y)^{2}}$ के प्रसार में y^n का गुणांक $4n$ है।

7. सिद्ध कीजिए कि

$$(1+x+x^{2}+x^{3}+\ldots)(1-x+x^{2}-x^{3}+\ldots) = (1+x^{2}+x^{4}+x^{6}+\ldots)$$

*8. यह मानकर कि x इतना छोटा है कि x^3 तथा x की अन्य उच्चतर घातों की उपेक्षा की जा सकती है,

$(1-\frac{3}{2}x)^{5}\,(2+3x)^{6}$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. $\sqrt{101}$ को 6 दशमलव स्थानों तक ज्ञात करने के लिए $(100+x)^{\frac{1}{2}}$ के द्विपद प्रसार का प्रयोग कीजिए।

10. $(0.998)^{8}$ का 6 दशमलव स्थानों तक मान ज्ञात कीजिए।

[**संकेत** : $(1+x)^{8}$ के द्विपद प्रसार का प्रयोग कीजिए।]

8.4 ऐतिहासिक दृष्टिकोण

$n=2$ की स्थिति के लिए द्विपद प्रसार यूनानी गणितज्ञ **यूक्लिड** (लगभग 300 ई० पू०) को ज्ञात था। जहाँ तक प्राकृत संख्याओं की उच्चतर घातों के लिए द्विपद प्रसार का सम्बन्ध है, इसका श्रेय अरब गणितज्ञ **उमर खय्याम** (1048- 1122 ई०) को जाता है। उन्होंने संख्याओं के मूल ज्ञात करने में इस प्रसार का प्रयोग किया तथा दावा किया कि उन्होंने एक द्विपद की nवीं घात (n एक प्राकृत संख्या है) के लिए एक सूत्र प्राप्त किया है जिसके विषय में उन्होंने बताया कि उन्होंने उसका कथन अपनी एक अन्य कृति में दिया है।

परन्तु उनकी वह कृति आज तक नहीं मिल सकी है। पद 'द्विपद गुणांक' (binomial coefficient) सर्वप्रथम जर्मनी के गणितज्ञ **माइकेल स्टिफेल** (1486-1567 ई०) ने लगभग 1544 ई० में दिया था।

ऋणात्मक पूर्णांकीय तथा परिमेय संख्याओं के घातांकों के लिए द्विपद प्रमेय का व्यापकीकरण (generalization) सर **आईज़ेक न्यूटन** (1642—1727 ई०) ने 1665 ई० में किया था। उन्होंने इस व्यापकीकरण की उपपत्ति प्रदान नहीं की थी परन्तु यह सुझाव अवश्य दिया था कि यह संख्याओं के मूल ज्ञात करने में अत्यन्त उपयोगी है।

द्विपद प्रमेय की उपपत्तियों का श्रेय लेखकों की एक शृंखला को जाता है। ब्रिटिश गणितज्ञ **कोलिन मैकलॉरिन** (1698—1746 ई०) ने n के परिमेय मानों के लिए एक उपपत्ति दी थी। **जियोवैनी फ्रांसेस्को एम० एम० साल्वैमिनी** (1708-1791 ई०) तथा जर्मन गणितज्ञ **अब्राहम जी कास्टनर** (1719—1800 ई०) ने स्वतन्त्र रूप से n के पूर्णांकीय मानों के लिए द्विपद प्रमेय को सिद्ध किया था। स्विट्ज़रलैंड के सुप्रसिद्ध गणितज्ञ **लियोनार्ड ऑयलर** (1707—1783 ई०) ने भी 1744 ई० में भिन्नों वाले घातांकों के लिए द्विपद प्रमेय की एक उपपत्ति दी थी। अंत में, नार्वे के गणितज्ञ **नीलस हैनरिक ऐबल** (1802—1829 ई०) ने, जो एक निर्धन पादरी के पुत्र थे, सम्मिश्र संख्याओं वाले घातांकों के लिए द्विपद प्रमेय को सिद्ध किया था।

8.5 मुख्य संकल्पनाएँ

पास्कल त्रिभुज	**संचय विन्यास गुणांक**
ऋणेतर पूर्णांकीय घातांकों के लिए द्विपद प्रमेय	**परिमेय घातांकों के लिए द्विपद प्रमेय**
व्यापक पद	**द्विपद प्रमेय के प्रयोग से सन्निकटन**

8.6 अग्रिम अध्ययन हेतु सुझाव

पाठक बीजगणित की किसी मानक पाठ्यपुस्तक, उदाहरणार्थ, अनुच्छेद 3.12 की पुस्तक [1] को देखें। कुछ अन्य मानक पाठ्यपुस्तकें निम्न हैं :

[1] C. Smith : **A Treatise on Algebra, 5th Edition.**
Macmillan and Company Ltd., London (U.K.), 1957.

एक पुस्तक, जिसका अध्ययन गणित के प्रत्येक गम्भीर विद्यार्थी के लिए आवश्यक है, निम्न है :

[2] G. H. Hardy : **A Course of Pure Mathematics, 10th Edition.**
The Cambridge University Press, London (U.K.), 1963.

इस विषय के उच्चस्तरीय विवरण के लिए अनुच्छेद 1.12 में दी गई पुस्तक [2] देखें।
ऐतिहासिक संदर्भ के लिए पाठक अनुच्छेद 1.12 में दी गई पुस्तक [7], अनुच्छेद 2.7 में दी गई पुस्तक [3], इत्यादि को देखें।

विविध प्रश्नावली II

(एकक V, VI, VII तथा VIII पर)

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक अनुक्रम के प्रथम चार पद लिखिए जिनके nवें पद निम्न हैं :
   (i) $1+(-1)^n$
   (ii) $\dfrac{3^n}{2^n+1}$
   (iii) $\dfrac{2+(-2)^n}{n+1}$
   (iv) $\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
   (v) $\dfrac{n+4}{n+1}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक अनुक्रम के, जिनके nवें पद दिए हैं, सम्मुख लिखे पद ज्ञात कीजिए :
   (i) $2^n-\frac{5}{2}$; 8वाँ पद, 12वाँ पद
   (ii) $\dfrac{n^2+2n}{2n}$; 16वाँ पद, $(n-1)$ वाँ पद
   (iii) $2n-11$; 11वाँ पद, 20वाँ पद
   (iv) $\frac{2}{3}(n+1)(2n+1)$; 12वाँ पद

3. निम्नलिखित में से प्रत्येक अनुक्रम के प्रथम 6 पद लिखिए :
   (i) $a_1=4, a_{n+1}=2na_n$
   (ii) $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=-1$, $a_{n+2}=a_n\, a_{n+1}$

4. निम्नलिखित द्वारा परिभाषित अनुक्रम का 21वाँ तथा 42वाँ पद ज्ञात कीजिए :

$$t_n=\begin{cases} 0, \text{ यदि } n \text{ विषम है} \\ 1, \text{ यदि } n \text{ सम है} \end{cases}$$

5. ऐसे अनुक्रम के प्रथम 6 पद ज्ञात कीजिए जिसका प्रथम पद 1 है तथा $(n+1)$वाँ पद, nवें पद में n जोड़ने से प्राप्त होता है।

6. निम्नलिखित में से प्रत्येक समांतर श्रेणी का सार्व अंतर ज्ञात कीजिए तथा उसके अगले 6 पद लिखिए :
   (i) $-9, -8\frac{3}{5}, -8\frac{1}{5}, \ldots$

(ii) $\sqrt{3}, 1, 2-\sqrt{3}, \ldots$

(iii) $2x-3y, -2x+3y, -6x+9y, \ldots$

7. निम्नलिखित में से प्रत्येक समांतर श्रेणी के सम्मुख लिखा पद ज्ञात कीजिए :

(i) $6, 5\frac{1}{3}, 4\frac{2}{3}, \ldots ; t_7$

(ii) $\frac{3n-1}{n}, \frac{3n-3}{n}, \frac{3n-5}{n}, \ldots ; t_r$

(iii) $a=\frac{1}{3}, d=-2; t_{20}$

8. k का मान निर्धारित कीजिए ताकि $\frac{2}{3}$, k तथा $\frac{5}{8}k$ एक समांतर श्रेणी के तीन क्रमागत पद हों।

9. क्या 310 समांतर श्रेणी 3, 8, 13, 18, ... का एक पद है ?

10. समांतर श्रेणी 17, $14\frac{1}{2}$, 12, ..., —38 में पदों की संख्या निर्धारित कीजिए।

11. समांतर श्रेणी 5, 13, 21, ... का कौन सा पद 181 है ?

12. एक समांतर श्रेणी का तीसरा पद 1 है तथा छठा पद —11 है। इस श्रेणी का 15 वाँ तथा r वाँ पद निर्धारित कीजिए।

13. एक समांतर श्रेणी का पहला पद —6 तथा 12 वाँ पद 13 है। सार्व अंतर ज्ञात कीजिए।

14. एक समांतर श्रेणी का 7 वाँ पद 34 तथा 15 वाँ पद 74 है। इस श्रेणी का प्रथम पद तथा 40 वाँ पद निर्धारित कीजिए।

15. हमें एक समांतर श्रेणी दी गई है जिसका प्रथम पद a तथा सार्व अंतर d है।

(क) यदि इसके प्रत्येक पद में एक ही संख्या k जोड़ दी जाए तो क्या इस प्रकार प्राप्त श्रेणी भी एक समांतर श्रेणी होगी ? यदि ऐसा है, तो उसका सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए।

(ख) यदि इसके प्रत्येक पद को एक ही संख्या c से गुणा किया जाए तो क्या इस प्रकार प्राप्त श्रेणी भी एक समांतर श्रेणी होगी ? यदि ऐसा है, तो उसका सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए।

16. यदि x, y तथा z एक समांतर श्रेणी में हों तो दिखाइए कि $(xy)^{-1}$, $(zx)^{-1}$ तथा $(yz)^{-1}$ भी समांतर श्रेणी में हैं।

17. यदि एक समांतर श्रेणी का p वाँ पद q तथा q वाँ पद p है, तो सिद्ध कीजिए कि इसका r वाँ पद $p+q-r$ है।

18. निम्नलिखित में से प्रत्येक समांतर श्रेणी का उसके सम्मुख दिए पदों तक योग ज्ञात कीजिए :

(i) 0, —7, —14, ... ; 45 पदों तक

(*ii*) $1\frac{1}{7}, 1, \frac{6}{7}, \ldots$; 12 पदों तक

(*iii*) $(x+y)^2,\ x^2+y^2,\ (x-y)^2, \ldots$; 10 पदों तक

19. 50 से 500 के बीच उन सभी पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए जो 7 से विभाज्य हैं।

20. समांतर श्रेणी 13, 6, —1,... के पदों की संख्या n ज्ञात कीजिए ताकि $S_n = -92$ हो।

21. ऐसी समांतर श्रेणी, जिसका तीसरा पद 1 तथा छठा पद —11 है, के प्रथम 32 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

22. एक ऐसी समांतर श्रेणी निर्धारित कीजिए, जिसके प्रथम n पदों का योग an^2+bn हैं।

23. एक समांतर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योग 9 है तथा उनके वर्गों का योग 35 है। S_n ज्ञात कीजिए।

24. यदि S_n एक समांतर श्रेणी के प्रथम n पदों के योग को व्यक्त करता है तो सिद्ध कीजिए कि $S_{30} = 3\,(S_{20} - S_{10})$

25. निम्नलिखित में से प्रत्येक गुणोत्तर श्रेणी के अगले चार पद लिखिए :

(*i*) $7, -1, \frac{1}{7}, \ldots$

(*ii*) $\sqrt{2}, \sqrt{10}, 5\sqrt{2}, \ldots$

(*iii*) $\frac{1}{x^2}, x, x^4, \ldots$

26. निम्नलिखित में से प्रत्येक गुणोत्तर श्रेणी के सम्मुख दिए पद ज्ञात कीजिए :

(*i*) $12, 8, \frac{16}{3}, \ldots$; t_{10}, t_6

(*ii*) $\frac{1}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{3}, 12\sqrt{3}, \ldots$; t_{19}

(*iii*) $1, -x^2, x^4, \ldots$; t_{28}

(*iv*) $b = 3, r = 1.1$; t_5

27. यदि a, b, c तथा d एक गुणोत्तर श्रेणी में हों तो सिद्ध कीजिए कि $a+b, b+c$ तथा $c+d$ भी गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

28. एक गुणोत्तर श्रेणी का 18 वाँ पद निर्धारित कीजिए जिसका पाँचवाँ पद 1 तथा सार्व अनुपात $\frac{2}{3}$ है।

29. हमें एक गुणोत्तर श्रेणी दी गई है जिसका प्रथम पद b तथा सार्व अनुपात r है।

(*i*) यदि इसके प्रत्येक पद को $k\ (\neq 0)$ से गुणा किया जाये तो क्या इस प्रकार प्राप्त श्रेणी भी एक गुणोत्तर श्रेणी होगी? यदि ऐसा है, तो इसका सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

(*ii*) यदि इसके प्रत्येक पद का वर्ग किया जाये तो क्या इस प्रकार प्राप्त श्रेणी भी एक गुणोत्तर श्रेणी होगी ? यदि ऐसा है, तो इसका सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

30. एक गुणोत्तर श्रेणी का तीसरा पद उसके पहले पद का वर्ग है। यदि दूसरा पद 8 है, तो इसका छठा पद ज्ञात कीजिए।

31. निम्नलिखित में से प्रत्येक गुणोत्तर श्रेणी का उसके सम्मुख दिए पदों तक योग ज्ञात कीजिए :

(*i*) 0.6, 0.06, 0.006, ... ; 10 पदों तक

(*ii*) $4\frac{1}{11}, -3\frac{3}{11}, 2\frac{34}{55}, \ldots$; 8 पदों तक

(*iii*) $a+b, ab^2+b^3, ab^4+b^5, \ldots$; r पदों तक

32. $\sum_{j=1}^{10}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}+\left(\frac{1}{5}\right)^{j+1}\right]$ का मान ज्ञात कीजिए।

33. गुणोत्तर श्रेणी 3, 6, 12,... के पदों की संख्या n ज्ञात कीजिए ताकि $S_n=381$ प्राप्त हो।

34. एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योग 21 है जबकि अगले तीन पदों का योग 168 है। इस श्रेणी का प्रथम पद, सार्व अनुपात तथा उसके प्रथम 6 पद ज्ञात कीजिए।

35. ऐसी गुणोत्तर श्रेणी का तीसरा पद ज्ञात कीजिए जिसका सार्व अनुपात 3 है तथा जिसके प्रथम 7 पदों तक का योग 2186 है।

36. एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योग 13 है तथा उनके वर्गों का योग 91 है। वह गुणोत्तर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

37. यदि S_n एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों तक के योग को व्यक्त करता है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$(S_{10}-S_{20})^2=S_{10}(S_{30}-S_{20})$$

38. निम्नलिखित में से प्रत्येक अपरिमित गुणोत्तर श्रेणी के लिए S_∞ ज्ञात कीजिए :

(*i*) $24, 18, 13\frac{1}{2}, \ldots$

(*ii*) $\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \ldots$

39. निम्नलिखित प्रत्येक दशमलव के लिए एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए जिसका प्रसार वह दशमलव हो :

(*i*) $1.\overline{36}$ (*ii*) $3.01\overline{09}$

(*iii*) $0.\overline{437}$

40. ऐसी गुणोत्तर श्रेणी के लिए S_∞ [illegible] प्रथम पद 28 तथा चौथा पद $\frac{4}{49}$ है।

41. यदि गुणोत्तर श्रेणी p, 1, $\frac{1}{p}$,...के लिए S_∞, $\frac{25}{4}$ हो तो p का (के) मान ज्ञात कीजिए।

42. एक गुणोत्तर श्रेणी के अपरिमित पदों का योग 23 है तथा उनके वर्गों का योग 69 है। प्रथम पद तथा सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

43. एक समबाहु त्रिभुज की एक भुजा 24 सें० मी० है। इसकी भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिला कर एक अन्य त्रिभुज बनाया जाता है। इस प्रकार प्राप्त त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाकर फिर एक अन्य त्रिभुज बनाया जाता है। इस क्रम को अपरिमित बार दोहराया जाता है। सभी त्रिभुजों की परिमापों का योग ज्ञात कीजिए।

44. एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का गुणनफल 1000 है। यदि हम इसके द्वितीय पद में 6 तथा तृतीय पद में 7 जोड़ दें तो तीनों पद एक समांतर श्रेणी बनाते हैं। गुणोत्तर श्रेणी के पदों को ज्ञात कीजिए।

45. यदि p, q तथा r समांतर श्रेणी में और x, y तथा z गुणोत्तर श्रेणी में हों, तो सिद्ध कीजिए कि

$$x^{q-r}y^{r-p}z^{p-q}=1$$

46. गणितीय आगमन के सिद्धान्त के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए $n(n+1)(n+2)(n+3)$, 24 से विभाज्य है।

47. निम्नलिखित में से प्रत्येक कथन को सिद्ध करने के लिए गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग कीजिए :

(i) $5+15+45+\ldots+5(3)^{n-1}=\frac{5}{2}(3^n-1)$

(ii) $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\ldots+\frac{1}{(a+n-1)(a+n)}=\frac{n}{a(a+n)}$

48. सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए

$11^{n+2}+12^{2n+1}$, 133 से विभाज्य है।

49. यह सिद्ध करने के लिए कि प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए

$1.3+3.5+5.7+\ldots+(2n-1)(2n+1)=\frac{n(4n^2+6n-1)}{3}$ है, गणितीय आगमन के सिद्धांत का प्रयोग कीजिए।

50. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए

$1.1!+2.2!+3.3!+\ldots+n.n!=(n+1)!-1$ है।

51. दिखाइए कि यदि कथन $P(n): 2^n<n!$, $n=k$ के लिए सत्य है तो यह $n=k+1$ के लिए भी सत्य है। क्या हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $P(n)$ प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सत्य है ?

52. एक पासा (*die*) एक बार उछाला जाता है तथा परिणाम को लिख लिया जाता है।

कुल सम्भव परिणाम कितने होंगे ? यदि पासा दो बार उछाला जाए तो कुल सम्भव परिणाम कितने होंगे ? तीन बार उछालने से कितने परिणाम प्राप्त होंगे ? क्या आप अपने उत्तरों में कोई प्रतिरूप देखते हैं ?

[पाठक को चाहिए कि वह एक पासे को, उदाहरणार्थ, n बार उछालने से प्राप्त परिणामों के लिए एक सूत्र की खोज करे ।]

53. अंकों 8, 1, 5, 3 तथा 4 से दो अंकों की कितनी संख्याएं बनाई जा सकती हैं यदि यह मान लिया जाए कि

(क) अंकों की पुनरावृत्ति हो सकती है ?

(ख) अंकों की पुनरावृत्ति नहीं हो सकती ?

54. अंकों 2, 8, 5, 6 तथा 9 से 1000 से छोटी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं यदि

(i) किसी अंक की पुनरावृत्ति नहीं होती हो ?

(ii) अंकों की पुनरावृत्ति हो सकती हो ?

55. 'DELHI' शब्द के अक्षरों से 5 अक्षरों के कितने भिन्न शब्द बनाए जा सकते हैं ? इनमें से कितने शब्द D से आरम्भ होंगे तथा I पर समाप्त होंगे ?

56. अंको 1, 2, 3, 5 तथा 7 से कितनी भिन्न प्राकृत संख्याएँ बनाई जा सकती है यदि यह मान लिया जाए कि अंकों की पुनरावृति नहीं हो सकती ? इनमें से कितनी संख्याएँ सम होंगी ?

57. एक बस की तीन खाली सीटों पर दो भिन्न कितनी विधियों से बैठ सकते हैं ?

58. इन्दिरा और पिंकी चार कालेजों में कितनी विधियों से प्रवेश ले सकती हैं यदि वे दोनों एक ही कालेज में प्रवेश न लेती हों ?

59. सभी अक्षरों को एक साथ लेकर, शब्द 'HEXAGON' के अक्षरों के कुल क्रमचय ज्ञात कीजिए ।

60. चार पर्यटक ठहरने के लिए किसी नगर के 5 होटलों में से चयन कर सकते हैं । उनमें से प्रत्येक पर्यटक एक भिन्न होटल में ठहरना चाहता है । वे कितनी विधियों से होटलों का चयन कर सकते हैं ?

61. एक विविध मनोरंजन कार्यक्रम में पाँच गानों को प्रस्तुत किया जाना है । इन्हें कितने विभिन्न क्रमों से प्रस्तुत किया जा सकता है ?

62. ताश के 52 पत्तों की गड्डी में से दो पत्तों को एक एक करके इस प्रकार निकाला जाता है कि एक बार में निकाला गया पत्ता गड्डी में वापिस नहीं रखा जाता । कितनी विधियों से गड्डी में से दो पत्तों को निकाला जा सकता है ?

63. किसी प्रतियोगिता में कुल 10 प्रवेश-पत्र हैं । कितनी विधियों से पहले तीन इनाम दिए जा सकते हैं ?

64. दिए हुए 8 झंडों से 3 झंडों के कितने भिन्न संकेत (झंडों को ऊर्ध्वाधर, एक के नीचे एक रखते हुए) बनाए जा सकते हैं ?

65. एक गणित क्लब में 18 सदस्य हैं। कितनी विधियों से सदस्य एक अध्यक्ष, एक उपाध्यक्ष, एक सचिव तथा एक कोषाध्यक्ष का चुनाव कर सकते हैं यदि कोई भी सदस्य एक बार में उपरोक्त में से केवल एक ही पद ग्रहण कर सकता हो ?

66. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $P(8,5)$ (ii) $P(13,3)$

(iii) $P(6,6)$ (iv) $P(27,2)$

67. 'ALLAHABAD' शब्द के अक्षरों को कितनी भिन्न विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है ?

68. 9 बच्चों में 4 सेब, 3 केले तथा 2 संतरे कितनी विधियों से बाँटे जा सकते हैं ताकि प्रत्येक बच्चे को केवल एक ही फल प्राप्त हो ?

69. r ज्ञात कीजिए यदि

$$P(10,r+1) : P(11,r) = 30 : 11$$

70. n निर्धारित कीजिए यदि

$$P(n,4) : P(n+1,5) = 1 : 9$$

*71. एक पोल पर 4 सफेद, 1 नीले तथा 3 लाल झंडों को व्यवस्थित करके संदेश भेजे जाते हैं। यदि संदेश उसी क्रम से प्रसारित किए जाएँ जिसमें रंगों को व्यवस्थित किया गया है तो दिखाइए कि यदि सभी आठों झंडों का प्रयोग किया जाए तो कुल 280 भिन्न संदेश भेजे जा सकते हैं। यदि केवल 6 झंडों का प्रयोग किया जाए तो कुल कितने संदेश प्रसारित किए जा सकते हैं ?

72. यदि $C(n,r)$, n भिन्न वस्तुओं में से एक बार में r वस्तुओं को एक साथ लेकर प्राप्त संचयों की संख्या को व्यक्त करता है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$C(n,r) + 2C(n,r-1) + C(n,r-2) = C(n+2,r)$$

73. यदि $P(n,r)$, n भिन्न वस्तुओं में से एक बार में r वस्तुओं को एक साथ लेकर प्राप्त क्रमचयों को व्यक्त करता है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$P(n,r) = (n-r+1)\,P(n,r-1)$$

74. अंकों 2, 3, 4, 5 तथा 9 से पाँच अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं यदि यह मान लिया जाए कि किसी अंक की पुनरावृत्ति नहीं होती ? इनमें से कितनी संख्याएँ 5 से विभाज्य हैं ?

75. अंकों 3, 4, 5, 8 तथा 9 से कितनी सम संख्याएँ बनाई जा सकती हैं ?

76. जानवरों का एक प्रशिक्षक कितनी विधियों से 6 सिंह तथा 5 बाघों को एक पंक्ति में व्यवस्थित कर सकता है यदि दो बाघ एक साथ न रखे जाएँ ?

77. दिखाइए कि n भिन्न पुस्तकों को एक अलमारी में व्यवस्थित करने की कुल $(n-1)!\ (n-2)$ विधियाँ हैं जबकि दो विशिष्ट पुस्तकों को एक साथ न रखा जाए।

78. यदि $P(n, 5)=12P(n, 3)$ हो, तो n निर्धारित कीजिए।

79. यदि $P(2n, 3) = 100\,P(n, 2)$ है, तो दिखाइए कि n का मान 13 है।

80. **Public Administration Review** के नवम्बर-दिसम्बर अंक में **Defence Digest** से निम्नलिखित '**buzz—phrases**' (वे वाक्यांश या शब्द जिनका प्रयोग अन्य व्यक्तियों को प्रभावित करने के लिए किया जाता है) प्रकाशित हुए :

BUZZ WORDS

Column 1		Column 2		Column 3	
0	Integrated	0	Management	0	Options
1	Total	1	Organizational	1	Flexibility
2	Systematized	2	Monitored	2	Capability
3	Parallel	3	Reciprocal	3	Mobility
4	Functional	4	Digital	4	Programming
5	Responsive	5	Logistical	5	Concept
6	Optimal	6	Transitional	6	Time-phase
7	Synchronized	7	Incremental	7	Projection
8	Compatible	8	Third-generation	8	Hardware
9	Balanced	9	Policy	9	Contingency

यह देखा गया कि कुछ व्यक्तियों को 3-शब्दों के वाक्यांशों का प्रयोग करने की आदत है जिनका चयन वे स्तम्भ 1, 2 तथा 3 में से प्रत्येक से इसी क्रम से एक एक शब्द लेकर करते हैं। उदाहरणार्थ, 'Synchronized Transitional Programming'। इसमें सन्देह है कि शायद इन वाक्यांशों का प्रयोग करने वाले वास्तव में इनका अर्थ जानते हैं या नहीं। यह अनुभव किया गया है कि इन वाक्यांशों का प्रयोग अन्य व्यक्तियों को प्रभावित करने के लिए किया जाता है। इस प्रकार के 3-शब्दों के कुल कितने वाक्यांश संभव हैं ?

81. यदि $\dfrac{C(n, r)}{C(n, r+1)} = \dfrac{1}{2}$ तथा $\dfrac{C(n, r+1)}{C(n, r+2)} = \dfrac{2}{3}$ हो, तो n तथा r के मान निर्धारित कीजिए।

82. अंकों 1, 2, 3, 6 तथा 8 से 23000 से बड़ी 5 अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं ?

83. यदि $\alpha = C(n, 2)$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $C(\alpha, 2) = 3C(n+1, 4)$ है।

84. (क) कितने क्रमित युग्म (x, y) समीकरण $x+y=100$ के हल हैं ?
[कल्पना कीजिए कि x और y धनात्मक पूर्णांक हैं ।]

*(ख) दिखाइए कि कुल 4851 क्रमित त्रियुग्म (ordered triples) ऐसे हैं जो कि समीकरण $x+y+z=100$ के हल है, जहाँ x, y और z धनात्मक पूर्णांक हैं ।

[संकेत : मान लीजिए $x=1$ है। धनात्मक पूर्णांकों y और z में समीकरण $y+z=99$ के कितने हल हैं ? फिर मान लीजिए $x=2$ है। धनात्मक पूर्णांकों y और z में समीकरण $y+z=98$ के कितने हल हैं ? इत्यादि ।]

85. राम के 5 मित्र हैं । वह कितनी विधियों से एक या एक से अधिक मित्रों को पार्टी में आमन्त्रित कर सकता है ?

86. 6 लड़कों तथा 5 लड़कियों में से 4 सदस्यों की एक कमेटी का चुनाव किया जाना है। कमेटी में कम से कम एक लड़के तथा कम से कम एक लड़की को सम्मिलित करना आवश्यक है । कितनी विधियों से हम कमेटी का चुनाव कर सकते हैं ?

87. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार कीजिए :

(i) $(2x-3x^2)^5$

(ii) $(x^2+2y^3)^6$

(iii) $(1-x^2)^4$

(iv) $(\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}b)^7$

88. $(x-y)^{43}$ के प्रसार में 40 वें पद को लिखिए तथा उसे सरल कीजिए ।

89. $\left(y^2-\dfrac{2}{y^3}\right)^5$ के प्रसार में 'y' से स्वतंत्र पद को लिखिए तथा उसे सरल कीजिए ।

90. $\left(a y^{\frac{1}{2}}-bx^3\right)^{17}$ के प्रसार में x^{18} वाले पद को लिखिए तथा उसे सरल कीजिए ।

91. $(a-2b)^4(a+b)^3$ के प्रसार में उस पद को लिखकर सरल कीजिए जिसमें $a^2 b^5$ आता हो ।

92. $(1+y)^n$ के प्रसार में पाँचवें, छठे तथा सातवें पद के गुणांक समांतर श्रेणी में हैं । n निर्धारित कीजिए ।

93. यदि K_r, $(1+2y)^{10}$ के प्रसार में y की घातों के आरोही क्रम में y^{r-1} का गुणांक है, तो r निर्धारित कीजिए जबकि $\dfrac{K_{r+2}}{K_r}=4$ है ।

*94. यदि C_r, $(1+x)^n$ के प्रसार में x^r का गुणांक है तो सिद्ध कीजिए कि

$$C_0+3C_1+5C_2+\ldots+(2n+1)\,C_n=(n+1)\,2^n$$

95. निम्नलिखित में से प्रत्येक प्रसार में, x अथवा y की घातों के आरोही क्रम में, प्रथम चार पदों को लिखिए तथा उन्हें सरल कीजिए :

(*i*) $(2a+x)^{-3}$

(*ii*) $(1-2x^2)^{\frac{3}{2}}$

(*iii*) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{-\frac{5}{2}}$

यह भी लिखिए कि ये प्रसार कब मान्य हैं।

96. $\left(1-2y^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ के प्रसार में उस पद को लिखिए तथा सरल कीजिए जिसमें y^3 आता हो।

97. निम्नलिखित में से प्रत्येक को 4 दशमलव स्थानों तक परिकलित करने के लिए द्विपद प्रमेय का प्रयोग कीजिए :

(*i*) $(1.025)^6$

(*ii*) $(1.04)^{-\frac{5}{2}}$

98. यदि x इतना छोटा है कि x^3 तथा x की उच्चतर घातों को छोड़ा जा सकता है, तो $(1-\frac{3}{2}x)^5\,(2+3x)^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

99. $\left(y+\frac{1}{y}\right)^4\left(y-\frac{1}{y}\right)^{12}$ के प्रसार में y से स्वतंत्र पद को लिखिए तथा उसे सरल कीजिए।

100. यदि x इतना छोटा है कि x^4 तथा x की उच्चतर घातों को छोड़ा जा सकता है, तो

$(2-\frac{3}{2}x)^4\,(2+\frac{3}{8}x^2)^2-(2+x)^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

एकक I

प्रश्नावली 1.1

3. (i) 0.96875
   (ii) 0.688
   (iii) $0.\overline{538461}$
   (iv) $0.\overline{9411764705882352}$

4. $\frac{2353}{990}$

5. $\frac{223760}{9999}$

प्रश्नावली 1.2

3. हाँ, हाँ

4. हाँ

5. 6.557

एकक II

प्रश्नावली 2.1

1. 7, 3

2. $\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{7}$

3. 3, −5

4. 0, 7

5. $\sqrt{5}$, 0

6. 2, $\sqrt{2}$

7. 2, 7

8. $\frac{5}{4}$, $\frac{2}{7}$

9. 0, 1

10. $\frac{2+2\sqrt{2}}{3}$, 0

11. 0, 6

प्रश्नावली 2.2

11. $0+2i$

12. $1-2i$

13. $2+3i$

14. $3+0i$

15. $4-i$

16. $-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}i$

17. नहीं

प्रश्नावली 2.3

1. $-9+i$

2. $-\frac{7}{2}+i$

3. $11+4i$

4. $-4+3i$

5. $2(\sqrt{3}+1)+5i$
6. $2+5i$
7. $8-7i$

प्रश्नावली 2.4

1. $1+0i$
2. $6+4i$
3. $-209+144i$
4. $44-6i$
5. $-19+59i$
6. $-1-2\sqrt{6}i$
7. $-10+0i$
8. $9+19i$
9. $\frac{73}{4}+0i$
10. $21+20i$
11. $-2-\frac{3}{2}i$
12. $-286-259i$
13. $-\frac{99}{4}-\frac{107}{8}i$
14. $54\sqrt{5}-378i$
18. $\pm\frac{6}{11}i$
19. $\pm 12i$
20. $\pm\sqrt{31}\,i$
21. $\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}i$
22. -24
23. $-\frac{5}{3}$
24. $-21+14i$
25. $26+2i$

प्रश्नावली 2.5

1. $3+7i$
2. $-\sqrt{5}-3i$
3. $-3-7i$
4. $11-60i$
5. $-3-6i$
6. $\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i$
7. $\frac{\sqrt{3}}{52}-\frac{7}{52}i$
8. $\frac{6}{39}+\frac{\sqrt{3}}{39}i$
9. i
10. $\frac{4}{25}+\frac{3}{25}i$
11. $\frac{22}{41}-\frac{7}{41}i$
12. $-\frac{22}{41}-\frac{7}{41}i$
13. $1+i$
14. $\frac{6}{25}+\frac{17}{25}i$
15. $-\frac{6}{13}-\frac{9}{13}i$
16. $\frac{22}{17}+\frac{3}{17}i$

17. $\frac{1}{2}i$

18. $12i$

19. $\frac{7}{5}-\frac{11}{5}i$

एकक III

प्रश्नावली 3.1

1. $-\frac{7}{3}, -1$

2. $2, \frac{5}{2}$

3. $-4\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}$

4. $\frac{5}{2}, -2$

5. $1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. $-0.5, 0.35$

7. $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$

8. $-\frac{3}{2}, \frac{3}{5a}\ (a\neq 0)$

9. $-2, 1$

10. $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

11. 0

12. $\pm 3, \pm 2$

13. $\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}$

14. $-2, -\frac{3}{4}$

15. 3

16. कोई वास्तविक मूल नहीं

17. $\frac{9}{13}, \frac{4}{13}$

18. $1\pm\frac{1}{2}\sqrt{43}$

19. कोई मूल नहीं

20. कोई वास्तविक मूल नहीं

21. $-\frac{1}{2}$

22. लम्बाई 18 मी०, चौड़ाई 8 मी०

23. $\frac{5}{4}, \frac{4}{5}$

24. 17, 37

25. 16, 48

26. 36

27. $1, -\frac{37}{4}$

28. $-\frac{3\sqrt{3}}{4}, -\frac{3}{4}$

29. $\frac{16}{7}, \frac{4}{7}$

30. $\frac{10}{3}, -\frac{13}{3}$

31. $-\frac{3}{4}, 0$

32. $\frac{11\sqrt{3}}{6}, \frac{3}{4}$

33. $x^2+7x+12=0$

34. $2x^2+3x-2=0$

35. $x^2-6x+6=0$

36. $x^2-49=0$

37. $4x^2+5x-6=0$

38. $x^2-80=0$

39. $21x^2+23x+6=0$

40. $x^2-4x-14=0$

प्रश्नावली 3.2

1. $3\pm 2i$
2. $-8\pm 3i$
3. $\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3}i$
4. $\sqrt{5}\pm 3i$
5. $-3\sqrt{3},\ -\frac{2}{3}\sqrt{3}$
6. $\frac{-4\sqrt{3}\pm 2\sqrt{6}}{3}$
7. $\frac{3\sqrt{2}\pm 2\sqrt{5}i}{19}$
8. $\frac{7\sqrt{3}\pm\sqrt{285}\ i}{12}$
9. $1\pm\sqrt{3}i$
10. $\pm\frac{\sqrt{33}}{11},\pm\frac{\sqrt{3}}{3}i$
11. अवास्तविक सम्मिश्र तथा संयुग्मी
12. अवास्तविक सम्मिश्र तथा संयुग्मी
13. अवास्तविक सम्मिश्र तथा संयुग्मी
14. वास्तविक तथा समान
15. वास्तविक तथा असमान
16. अवास्तविक सम्मिश्र तथा संयुग्मी
17. 4
18. ± 6
19. 25
20. 16
21. $0, -1$
22. $\frac{7\sqrt{3}}{12},\ \frac{1}{4}$
23. $-\frac{2}{5},\ -\frac{27}{2}$
24. $\pm\frac{b}{a^2}\sqrt{b^2-4ac}$ यदि $b^2-4ac\geqslant 0$;

    $\pm\frac{b}{a^2}\sqrt{-(b^2-4ac)}$ यदि $b^2-4ac<0$
25. $-\frac{b}{c}$
26. $\frac{b^2-2ac}{ac}$
27. $\frac{b^4+2a^2c^2-4ab^2c}{a^4}$
28. $\frac{b^6+9a^2b^2c^2-6ab^4c-2a^3c^3}{a^6}$
29. $\pm 3\sqrt{5}$
30. $\pm\frac{1}{2}$

प्रश्नावली 3.3

1. $15x^2+11x-12=0$
2. $x^2-14x+58=0$

3. $x^2-2x-2=0$

4. $x^2+14x+113=0$

5. $x^2-(4+\sqrt{2})x+3(1+\sqrt{2})=0$

6. $4x^2-17x+4=0$

7. $(m^2-n^2)x^2+4mnx-m^2+n^2=0$

8. $x^2+(a-b)^2=0$

9. $28x^2-20x+1=0$

10. (i) $acx^2-(b^2-2ac)x+ac=0$
   (ii) $cx^2+bx+a=0$

प्रश्नावली 3.4

1. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-3i)$
2. $\pm(3-2i)$
3. $\pm(1-i)$
4. $\pm(4+3i)$
5. $\pm(2-5i)$
6. $\pm(1+\sqrt{3}i)$
7. $\pm(5-4i)$
8. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$
9. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

प्रश्नावली 3.5

1. $3i; -2i$
2. $-2i, -2i$
3. $4-3i, 3+2i$
4. $3i, \ \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$
5. $2i, 3\sqrt{2}$
6. $i, 1-i$
7. $-i, -2i$
8. $i, -\frac{1}{3}i$
9. $\pm(1-i)$
10. $\pm(4+3i)$
11. $\pm(2-5i)$

प्रश्नावली 3.6

1. (i) $x\geqslant\frac{2}{5}, \ x\leqslant-\frac{2}{3}$
   (ii) $x>6, x<1$
   (iii) $x>2, x<-2$
   (iv) $-3\leqslant x\leqslant3$
   (v) सभी वास्तविक x
2. (i) कोई हल नहीं
   (ii) $x\geqslant7, x\leqslant-3$
   (iii) $-2\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$
   (iv) $-4\leqslant x\leqslant3$

विविध प्रश्नावली I

(एकक I, II और III पर)

1. (i), (iv), (vii), (viii), (ix)
2. हाँ, हाँ, हाँ
3. (i) $3.\overline{09}$ (ii) $0.\overline{2}$
   (iii) $0.32\overline{5}$ (iv) $0.\overline{567}$
   (v) $0.\overline{142857}$ (vi) $0.\overline{12}$

4. (i) $\frac{17}{3}$

(ii) $\frac{25}{11}$

(iii) $\frac{90}{11}$

(iv) $\frac{7847}{33300}$

(v) $\frac{1187}{5000}$

(vi) $\frac{2374}{9999}$

10. $\sqrt{11}-\sqrt{3}, \sqrt{8}, \sqrt{2}+\sqrt{6}, \sqrt{3}+\sqrt{5}$.

12. हाँ

13. (i) 2, 3

(ii) 4, 1

(iii) 3, −3

15. (i) $0+0i$

(ii) $0-i$

(iii) $-1+0i$

(iv) $-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}i$

(v) $\sqrt{2}+\frac{3}{4}i$

(vi) $\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}i$

16. (i) $8+7\sqrt{2}i$

(ii) $-5-9i$

(iii) $1-i$

(iv) $14-8i$

(v) $13+4i$

(vi) $16-37i$

(vii) $-6-28i$

(viii) $0+26i$

(ix) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

(x) $1+0i$

(xi) $\frac{(13+2\sqrt{2})}{3}-\frac{(13\sqrt{2}-2)}{3}i$

(xii) $-\frac{7\sqrt{2}+\sqrt{3}}{50}-\frac{7\sqrt{3}-\sqrt{2}}{50}i$

(xiii) $19-59i$

(xiv) $-5-5i$

(xv) $\frac{525}{169}-\frac{92}{169}i$

(xvi) $0+i$

(xvii) $-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}i$

(xviii) $-10+2i$

(xix) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i$

19. (i) $\frac{1}{8}-\frac{\sqrt{7}}{56}i$

(ii) $-\frac{5}{26}-\frac{1}{26}i$

21. (i) $-40+42i$

(ii) $-34-5\sqrt{7}i$

(iii) $\frac{71}{4}-\frac{19}{4}i$

22. (i) $\pm\frac{21}{25}i$

(ii) $\pm 4\sqrt{2}i$

(iii) $\pm\frac{2\sqrt{2}}{27}i$

23. (i) $8i$
(ii) $-132+171i$
(iii) $9-\frac{4\sqrt{3}-1}{2}i$

24. (i) $2, -\frac{7}{4}$
(ii) $\frac{3\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{30}}{4}i$
(iii) $\frac{1}{12}\pm\frac{\sqrt{95}}{12}i$
(iv) $-\frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$
(v) $-\frac{7}{10}\pm\frac{\sqrt{11}}{10}i$
(vi) $1, -6, -\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{39}}{2}i$

25. (i) अवास्तविक सम्मिश्र तथा संयुग्मी
(ii) अवास्तविक सम्मिश्र तथा संयुग्मी
(iii) अवास्तविक सम्मिश्र तथा संयुग्मी
(iv) वास्तविक तथा असमान
(v) वास्तविक तथा समान

26. (i) 0, 12
(ii) 21
(iii) 5, -3

27. (i) 0, 3
(ii) $-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}$
(iii) $2, -\sqrt{5}$

31. $2, -25$

34. $x^2-6x+11=0$

35. $2x^2-25x+82=0$

36. (i) $x^2-2\sqrt{2}\,x-7=0$
(ii) $x^2+x+1=0$
(iii) $x^2-2x+2=0$
(iv) $12x^2-25x+12=0$
(v) $x^2-x-3+\sqrt{3}=0$

37. (i) $\pm(1+i)$
(ii) $\pm(1+4i)$
(iii) $\pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{34}-3}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{34}+3}{2}}\,i\right]$
(iv) $\pm(3+i)$
(v) $\pm(3-i)$
(vi) $\pm(1+3i)$
(vii) $\pm(1-3i)$

38. (i) $3-i, -1+2i$
(ii) $1-i, \frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$
(iii) $2+i, 1-3i$

40. $-\frac{3}{4}+\frac{11}{2}i$

41. (i) $-1<x<3$
(ii) $\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\leqslant x\leqslant\left[1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$
(iii) कोई हल नहीं
(iv) $x\geqslant 6, x\leqslant -\frac{3}{2}$

42. (i) सभी x
(ii) $-4\leqslant x\leqslant 5$
(iii) कोई हल नहीं

एकक IV

पुनरावलोकन हेतु प्रश्नावली

1. $81; -8; \frac{1}{1024}; 128\sqrt{2}; \frac{4}{25}$

2. (i) $1; -64; 64$

   (ii) $1024; 256; \frac{1}{729}$

   (iii) $\frac{125}{8}; \frac{1}{y^6}; \frac{1}{x^2}; x^5; \frac{1}{x^2}$

   (iv) $\frac{1}{64}; a^6; 1 (c \neq 0); 8b^9$

   (v) $a^{12}b^8; -\frac{27}{8}x^6y^3; -5x^4y^5$

   (vi) $\frac{x^4}{y^6}; \frac{16a^{12}}{b^{16}}; -\frac{243x^{10}y^{15}}{32a^5b^{10}}$

   (vii) $-7a^8b^5; \frac{75b^{2m}}{a^{3m}}$

3. (क) $\frac{1}{125}; \frac{1}{9}; \frac{1}{49}; \frac{25}{9}$

   (ख) (i) $64; 32; \frac{1}{216}$

   (ii) $121; \frac{1}{a^3}$

   (iii) $\frac{4}{3}; \frac{1}{4096}; 512; 4$

   (iv) $\frac{1}{5832}; \frac{625}{65536}; \frac{3}{32}$

   (v) $\frac{9}{25}; 28; 419904$

   (vi) $\frac{a}{m}; \frac{3}{2m^2n^3}$

4. (क) $3; \frac{1}{7}; 8; 1296; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{9}{4};$

   $\frac{8}{27}; \frac{1}{4}; \frac{1}{27}y^5$

   (ख) (ii) $y^{\frac{11}{6}}$ (ii) a^4y^6

   (iii) $\frac{1}{81}y^{\frac{3}{2}}$ (iv) $x^8y^{\frac{8}{5}}$

   (v) $\frac{3b^2}{2a^2}$ (vi) $\frac{y^2}{4x^4}$

   (vii) $\frac{7a}{3y^{\frac{5}{8}}}$ (viii) $\frac{n}{32m^{10}}$

   (ix) $x-1$

   (x) $x+y+2x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ (xi) -5

   (xii) $\frac{xy}{x+y}$ (xiii) 625

5. (i) $\frac{2}{3}$ (ii) 0

   (iii) 3 (iv) 3

   (v) 2 (vi) 2

   (vii) $\frac{1}{2}$ (viii) —

एकक V

प्रश्नावली 5.1

1. $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}$
2. $25, -125, 625, -3125, 15625$
3. $2, 4, 8, 16, 32$
4. $3, \frac{8}{3}, \frac{27}{10}, \frac{96}{35}, \frac{5}{9}$

5. 1, 3, 6, 10, 15
6. 1, 5, 14, 30, 55
7. 75, 87
8. $\frac{16}{81}$
9. 512
11. 2, 2, 1, 0, −1, −2
12. $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, -\frac{1}{120}, -\frac{1}{720}$
13. 1, 1, 2, 3, 5, 8

प्रश्नावली 5.2

1. −3; −12, −15, −18, −21
2. $\frac{5}{4}$; $\frac{11}{4}$, 4, $\frac{21}{4}$, $\frac{13}{2}$
3. $-2y$; $x-5y$, $x-7y$, $x-9y$, $x-11y$
4. $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$, 1, $\frac{7}{6}$
5. 21; $2x+1$
6. $\frac{173}{15}$; $\frac{2}{3}n-\frac{7}{15}$
7. −100
8. $n-m$
9. 14
10. हाँ
13. −8, $5r-8$
14. $7q-6p$; $4p-3q+(q-p)n$
15. 10 वाँ
16. 3

प्रश्नावली 5.3

1. −897; $\frac{n}{2}(37-5n)$
2. −27.5; −637.5
3. 1218; 2912
4. 3969
5. $22(x-20y)$; $p[x-(p-2)y]$
6. 10000; 40000
7. 10100; $n(n+1)$
8. 98450
9. 2310
10. 5, 20
11. $n=16$, $l=73$
12. $l=103$, $S_{64}=3568$
13. $a=-13$, $d=3$
14. $a=-\frac{8}{3}$, $S_{20}=73\frac{1}{3}$
15. $d=30$, $S_{51}=-116280$
17. $6r-1$
18. 123525
19. 39100 रु०

प्रश्नावली 5.4

1. $-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{9}$, $-\frac{1}{27}$, $\frac{1}{81}$, $-\frac{1}{243}$
2. 9; −486, −4374, −39366, −354294
3. 0.1; 0.005, 0.0005, 0.00005, 0.000005
4. $\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$, $4\sqrt{6}$, $8\sqrt{3}$, $8\sqrt{6}$

5. $\frac{y}{x^3}$; $\frac{y^2}{x^5}$, $\frac{y^3}{x^7}$, $\frac{y^4}{x^9}$, $\frac{y^5}{x^{11}}$

6. 1.728; $(1.2)^{n-1}$

7. $128\left[-\frac{3^{10}}{4^{10}}\right]$; $(-1)^{n-1}\,128\left[\frac{3}{4}\right]^{n-1}$

8. $(-1)^{n-1}\,100(1.1)^{n-1}$

9. 3072

11. —2187

12. हाँ; b^2; r^2; b^2r^{2n-2}

13. ± 1

14. bc, rs; $\frac{b}{c}$, $\frac{r}{s}$

15. 120, 480, $30(2^n)$

प्रश्नावली 5.5

1. $3\left[1-\frac{2^{10}}{3^{10}}\right]$; $3\left[1-\frac{2^n}{3^n}\right]$

2. $\frac{1}{6}[1-(0.1)^8]$; $\frac{1}{6}[1-(0.1)^{20}]$

3. $\frac{\sqrt{7}}{2}(\sqrt{3}+1)\left(3^{\frac{n}{2}}-1\right)$

4. $\frac{1-(-a)^n}{1+a}$

5. $\frac{x^3(1-x^{2n})}{1-x^2}$

6. $\frac{8}{5}\left[1-\frac{1}{4^{12}}\right]$; $\frac{8}{5}\left[1-\frac{(-1)^n}{4^n}\right]$

7. $22+\frac{3}{2}(3^{11}-1)$

8. $6\left(1-\frac{1}{3^6}\right)$

9. $\frac{4^5}{3}(4^7-1)$

10. $2(2^{18}-1)+\frac{1}{2}(3^{18}-1)$

11. $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}, -\frac{16}{9}, \ldots; \frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}, -\frac{9}{16}, \ldots$

12. 10

13. $\frac{16}{7}$; 2; $\frac{16}{7}(2^n-1)$

14. 21845 रु०

15. 2059

16. $\frac{7}{9}\left[\frac{10}{9}(10^n-1)-n\right]$

17. $\begin{cases} 0, & \text{यदि } n \text{ सम है} \\ 1, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \end{cases}$

प्रश्नावली 5.6

1. $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{2}$

2. $-\frac{1}{7}$; $\frac{49}{8}$

3. 0.2; 7.5

4. 0.85; $333\frac{1}{3}$

5. 0.6; 0.75

6. —0.9; $5\frac{5}{19}$

7. $\frac{31}{45}$

8. $\frac{144}{99}$

9. $\frac{712}{999}$

10. $\frac{223760}{9999}$

11. $\frac{10}{99}$

12. $\frac{2}{3}$

13. 16

14. 512 वर्ग सें० मी०

एकक VII

प्रश्नावली 7.1

1. 8
2. 16; 32; हाँ; 2^n
3. 1024
4. 24
5. 8
6. 125
7. 120
8. 120
9. 1320
10. 42
11. 81
12. 8000
13. 180

प्रश्नावली 7.2

1. (i) $4 \times 3 \times 2 \times 1$; 24
   (ii) 2×1; 2
   (iii) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$; 5040
   (iv) $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$; 40320
2. 8; नहीं
3. 48; नहीं
4. 1680; नहीं
5. (i) 24
   (ii) 24
6. (i) 5040
   (ii) 1320
   (iii) n
   (iv) $n(n-1)$
   (v) $n(n-1)(n-2)$
7. (i) 15
   (ii) 35
   (iii 455

प्रश्नावली 7.3

1. (i) 720
   (ii) 15120
   (iii) 116280
   (iv) 5550
3. (क) 362880
   (ख) 1728
4. 6720
5. 2240

6. 25200

7. 14400

8. 144

9. 6759324

10. 120

11. 3628800

12. 360

13. 86400

14. 600; 120

15. 325; 130

16. 180; 55

17. (i) 8
(ii) 7
(iii) 5

18. (i) 5
(ii) 3
(iii) 2

20. 4989600

21. (क) 4 (ख) 8

22. 1; 3; 3; 1

23. 1; 4; 6; 4; 1

24. 210

25. 1680

26. 24

27. 126

प्रश्नावली 7.4

1. (i) 56
(ii) 1365

3. $\frac{n(n-1)}{2}$; $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$

4. (i) 19600
(ii) 8008
(iii) 190
(iv) 276
(v) 142506

5. 22; 26334

6. 5

8. 7200

9. 2880

10. 10

11. 3

12. 40

13. 462

14. 420

15. 120

16. 886656

17. 1; 5; 10; 10; 5; 1

18. 15

19. 455

21. 64

एकक VIII

प्रश्नावली 8.1

1. $x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6$

2. $x^2+2+\frac{1}{x^2}$

3. $32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3$
$+810xy^4-243y^5$

4. $\frac{1}{16}x^8-\frac{1}{8}x^6y+\frac{3}{32}x^4y^2-\frac{1}{32}x^2y^3+\frac{1}{256}y^4$

5. $-27x^3-9x-\frac{1}{x}-\frac{1}{27x^3}$

6. 6

7. $\frac{5}{256}y^4$

8. $\frac{3}{2}x^2y^6$

प्रश्नावली 8.2

1. (i) 9
   (ii) 17

2. −704000

3. (i) $a^5-10a^4b+40a^3b^2-80a^2b^3$
$+80ab^4-32b^5$

   (ii) $\frac{64}{729}t^6-\frac{32}{27}t^4+\frac{20}{3}t^2-20+\frac{135}{4t^2}$
$-\frac{243}{8t^4}+\frac{729}{64t^6}$

   (iii) $1024x^5-6400x^4y+16000x^3y^2-$
$20000x^2y^3+12500xy^4-3125y^5$

   (iv) $y^{16}+24y^{14}x+252y^{12}x^2+1512y^{10}x^3$
$+5670y^8x^4+13608y^6x^5+20412y^4x^6$
$+17496y^2x^7+6561x^8$

4. $-90a^2b^3$

5. $\frac{35}{648}a^4b^4$

8. −220

11. $10x^6a^4$, $10x^4a^6$

12. $-165x^6$

16. 7

17. $210x^6y^6$

प्रश्नावली 8.3

1. (ii) $\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{2}}{4}x-\frac{9\sqrt{2}}{32}x^2$, $|x|<\frac{2}{3}$

   (ii) $\frac{1}{9}+\frac{4}{243}x+\frac{20}{6561}x^2$, $|x|<\frac{9}{2}$

   (iii) $x^{\frac{4}{3}}-\frac{4}{3}x^{\frac{13}{3}}+\frac{14}{9}x^{\frac{22}{3}}$, $|x|<1$

2. $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}-\frac{4}{x^5}$

3. (i) 2.0025
   (ii) 0.1
   (iii) 1000.075
   (iv) 258.0552

4. (i) −918
   (ii) $\frac{13027}{8192}$

5. $8+\frac{25}{3}x$

8. $64+96x-720x^2$

9. 10.049875

10. 0.984112

विविध प्रश्नावली II

(एकक V, VI, VII तथा VIII पर)

1. (i) 0, 2, 0, 2

(ii) $1, \frac{9}{5}, \ 3, \frac{81}{17}$

(iii) $0, 2, -\frac{3}{2}, \ \frac{18}{5}$

(iv) लघु 2, लघु $\frac{3}{2}$, लघु $\frac{4}{3}$, लघु $\frac{5}{4}$

(v) $\frac{5}{2}, \ 2, \frac{7}{4}, \ \frac{8}{5}$

2. (i) $253\frac{1}{2}, \ 4093\frac{1}{2}$

(ii) $9, \frac{n+1}{2}$

(iii) 11, 29

(iv) $216\frac{2}{3}$

3. (i) 4, 8, 32, 192, 1536, 15360

(ii) $\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$

4. 0, 1

5. 1, 2, 4, 7, 11, 16

6. (i) $d=\frac{2}{5}; -7\frac{4}{5}, -7\frac{2}{5}, -7, -6\frac{3}{5}, -6\frac{1}{5}, -5\frac{4}{5}$

(ii) $d=1-\sqrt{3}; 3-2\sqrt{3}, 4-3\sqrt{3}, 5-4\sqrt{3}, 6-5\sqrt{3}, 7-6\sqrt{3}, 8-7\sqrt{3}$

(iii) $d=-4x+6y; -10x+15y, -14x+21y, -18x+27y, -22x+33y, -26x+39y, -30x+45y$

7. (i) 2

(ii) $\frac{3n-(2r-1)}{n}$

(iii) $-37\frac{2}{3}$

8. $\frac{16}{33}$

9. नहीं

10. 23

11. 23वाँ पद

12. $-47, 13-4r$

13. $\frac{19}{11}$

14. 4, 199

15. (क) हाँ, d

(ख) हाँ, cd

18. (i) -6930

(ii) $4\frac{2}{7}$

(iii) $10(x^2+y^2-7xy)$

19. 17696

20. 8

21. -1696

22. $b+a, b+3a, b+5a, \ldots$

23. n^2 अथवा $(6n-n^2)$

25. (i) $-\frac{1}{7^2}, \frac{1}{7^3}, -\frac{1}{7^4}, \frac{1}{7^5}$

(ii) $5\sqrt{10}, 25\sqrt{2}, 25\sqrt{10}, 125\sqrt{2}$

(iii) $x^7, x^{10}, x^{13}, x^{16}$

26. (i) $\frac{2048}{6561}$, $\frac{128}{81}$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{3}}6^{18}$

(iii) $-x^{54}$

(iv) 4.3923

28. $\frac{2^{18}}{3^{18}}$

29. (i) हाँ, r

(ii) हाँ, r^2

30. 128

31. (i) $\frac{2}{3}[1-(0.1)^{10}]$

(ii) $\frac{25}{11}\left[1-\frac{4^8}{5^8}\right]$

(iii) $\frac{(a+b)(1-b)^{2r}}{(1-b^2)}$

32. $2\left(1-\frac{1}{2^{10}}\right)+\frac{1}{20}\left(1-\frac{1}{5^{10}}\right)$

33. 7

34. 3; 2; 3, 6, 12, 24, 48, 96

35. 18

36. 1, 3, 9, ... या 9, 3, 1, ...

38. (i) 96 (ii) $2\sqrt{2}$

39. (i) $\frac{15}{11}$

(ii) $\frac{828}{275}$

(iii) $\frac{437}{999}$

40. $32\frac{2}{3}$

41. 5, $\frac{5}{4}$

42. $\frac{69}{13}$, $\frac{10}{13}$

43. 144 सें० मी०

44. 5, 10, 20 या 20, 10, 5

52. 6; 6^2; 6^3; हाँ

53. (क) 25 (ख) 20

54. (i) 85 (ii) 155

55. 120; 6

56. 325; 65

57. 6

58. 12

59. 5040

60. 120

61. 120

62. 2652

63. 720

64. 336

65. 73440

66. (i) 6720 (ii) 1716

(iii) 720 (iv) 702

67. 7560

68. 1260

69. 5

70. 8

71. 185

74. 120; 24

75. 130

76. 1814400

78. 7

80. 1000

81. 14; 4

82. 90

84. 360

85. 31

86. 310

87. (i) $x^5[32-240x+720x^2-1080x^3+810x^4-243x^5]$

(ii) $x^{12}+12x^{10}y^3+60x^8y^6+160x^6y^9+240x^4y^{12}+192x^2y^{15}+64y^{18}$

(iii) $1-4x^2+6x^4-4x^6+x^8$

(iv) $\frac{a^7}{3^7}-\frac{7}{2.3^6}a^6b+\frac{21a^5b^2}{3^5.2^2}-\frac{35}{3^4.2^3}a^4b^3+\frac{35}{3^3.2^4}a^3b^4-\frac{21a^2b^5}{3^2.2^5}+\frac{7ab^6}{3.2^6}-\frac{b^7}{2^7}$

88. $-123410x^4y^{39}$

89. 40

90. $12376a^{11}b^6y^{\frac{11}{2}}x^{18}$

91. $-24a^2b^5$

92. 7, 14

93. 5

95. (i) $\frac{1}{8a^3}-\frac{x}{16a^4}+\frac{3x^2}{16a^5}-\frac{5x^3}{32a^6}$; $(x<2a)$

(ii) $1-3x^2+\frac{3}{2}x^4+\frac{x^6}{2}$; $(2x^2<1)$

(iii) $\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}-\frac{5}{2x^{\frac{9}{2}}}+\frac{35}{8x^{\frac{13}{2}}}-\frac{105}{16x^{\frac{17}{2}}}$; $(x^2>1)$

96. $64y^2$

97. (i) 1.2184 (ii) .9066

98. $64+96x-720x^2$

99. 198

100. $-340x^3-394x$